

---

# Das Projekt: Modellierung in der Schule

Darstellung der verwendeten Modellierungssituationen  
sowie ihrer Bearbeitungen

Reflexion der Modellierungsprozesse

---

Fachbereich Mathematik und  
Fachdidaktik Mathematik  
(FB Erziehungswissenschaft)  
der Universität Hamburg

Gefördert durch die



Projektleitung:

Gabriele Kaiser

Andreas Meister

Claus-Peter Ortlieb

Jens Struckmeier

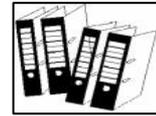
Verfasser dieser Zusammenfassung:

Torben Willander

Eike Rath

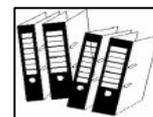
Ergänzungen: Magdalena Kornella

und Björn Schwarz

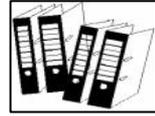


**Inhaltsverzeichnis:**

<u>Inhalt:</u> .....	<u>Seite:</u>
<b>Inhaltsverzeichnis:</b> .....	<b>2</b>
<b>I. Einleitung</b> .....	<b>5</b>
<b>II. Der Modellierungsprozess</b> .....	<b>7</b>
<b>III. Die Modellierungsbeispiele</b> .....	<b>11</b>
1. Problem aus der Fischereiwirtschaft: Die Berechnung von Fischfangquoten.....	11
1.1. Zusammenfassung .....	11
1.2. Problemdarstellung.....	12
1.3. Modellsituation.....	13
1.4. Problemlösungen.....	13
1.5. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt .....	20
1.6. Didaktische Reflexion und Problematisierung des Modellierungsprozesses.....	20
2. Mathematische Methoden im Risikomanagement.....	22
2.1. Zusammenfassung .....	22
2.2. Problemdarstellung.....	22
2.3. Problemlösungen.....	24
2.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt .....	37
2.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungs- prozesses .....	38
3. Mathematik der privaten Krankenversicherung .....	40
3.1. Zusammenfassung .....	40
3.2. Problemdarstellung.....	40
3.3. Problemlösungen.....	41
3.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt .....	48
3.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses.....	48

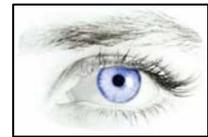


4.	Bestmögliche Stationierung von Rettungshubschraubern in Südtirol.....	51
4.1.	Zusammenfassung .....	51
4.2.	Problemdarstellung .....	52
4.3.	Problemlösungen .....	53
4.4.	Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt .....	56
4.5.	Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses .....	56
5.	Strahlentherapieplanung bei Krebspatienten.....	58
5.1.	Zusammenfassung .....	58
5.2.	Problemdarstellung .....	59
5.3.	Problemlösungen .....	60
5.4.	Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt .....	78
5.5.	Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses .....	78
6.	Ausrichtung und Vergleich von Molekülen („Molecular Alignment“) .....	80
6.1.	Zusammenfassung .....	80
6.2.	Problemdarstellung .....	80
6.3.	Problemlösungen .....	81
6.4.	Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt .....	87
6.5.	Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses .....	87
7.	Fingerprints.....	89
7.1.	Zusammenfassung .....	89
7.2.	Problemdarstellung .....	90
7.3.	Problemlösungen .....	91
7.4.	Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt .....	114
7.5.	Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses .....	115
<b>IV.</b>	<b>Reflexion der drei Seminarzyklen .....</b>	<b>117</b>
1.	Darstellung der drei Zyklen.....	117
1.1.	Wintersemester 2000/2001 und Sommersemester 2001 .....	117



---

1.2. Wintersemester 2001/2002 und Sommersemester 2002 .....	118
1.3. Wintersemester 2002/2003 und Sommersemester 2003 .....	119
2. Gesamtbewertung der drei Zyklen.....	121
<b>V. Zentrale Ergebnisse der Evaluation der drei Modellierungszyklen und Fazit.....</b>	<b>123</b>



## I. Einleitung

Die hier vorliegende Ausarbeitung beruht auf den im Projekt „Mathematische Modellierung als Brücke zwischen Schul- und Hochschulunterricht“ bearbeiteten Modellierungsbeispielen. Seit dem Wintersemester 2001/2002 haben an der Universität Hamburg drei Durchläufe des oben genannten Projektseminars stattgefunden, das sich somit insgesamt über drei Schuljahre erstreckte. In diesen Seminaren, die in Form einer Kooperation des Fachbereichs Mathematik und der Mathematikdidaktik organisiert waren, wurden durch Vertreter und Vertreterinnen aus Wirtschaft und Universität fachliche Problemstellungen aus dem Berufsleben von Mathematikern und Mathematikerinnen vorgestellt, die den Hintergrund bilden für das, was man mit „Mathematik an der Schnittstelle von Schule und Universität“ bezeichnen kann.

Im Verlauf dieser je zweisemestrigen Veranstaltungen sollten Schülerinnen und Schüler aus Mathematik-Leistungskursen des 12. Jahrgangs von Hamburger Schulen sich unter Anleitung von Lehrerinnen und Lehrern sowie Studierenden einer der jeweiligen Fragestellungen nähern. Parallel dazu fand an der Universität Hamburg eine Betreuung dieser Lehrerinnen und Lehrer sowie der Studierenden statt.

Als „pragmatisches“ Ziel der Seminare aus mathematikdidaktischer Sicht wurde die Befähigung der Schülerinnen und Schüler angestrebt, reale mathematikhaltige Probleme aus Alltag, Umwelt und Wissenschaft mit Hilfe mathematischer Modellierungen zu bearbeiten und ggf. zu lösen. Indem die Annahmen, die zu Modellierungsprozessen führen in den Arbeitsgruppen reflektiert wurden, sollten den Schülerinnen und Schülern die Verknüpfungen und die Grenzen zwischen Mathematik und Realität aufgezeigt werden. Dazu wurde Mathematik bewusst nicht als fertiges Produkt, sondern als Prozess aufgefasst und vermittelt.

Weitere, weniger „wissenschaftsbezogene“ als „soziale“ Lernziele lagen u.a. in der Arbeitsform und in der Präsentation des Themas. Modellierung wurde als Gruppenarbeitsform gesehen, ihre Ergebnisse als Gemeinschaftsprodukt. Dies sollte die Teamkompetenz (die auch von Mathematikern und Mathematikerinnen in der Wirtschaft verlangt wird) und das Selbstbewusstsein stärken. Zudem wurde sich eine Motivationssteigerung für das Fach Mathematik erhofft.

Insgesamt waren an den drei Seminardurchläufen beteiligt:

- ca. 180 Schülerinnen und Schüler und 10 Lehrerinnen und Lehrer aus Mathematik-Leistungskursen der Hamburger Gymnasien Grootmoor, Heidberg, Oberalster, Ohmoor, Tonndorf, Emilie-Wüstenfeld, Lohbrügge, Emil-Krause und St. Ansgar sowie dem Gymnasium Harksheide in Norderstedt



- 32 Studierende des Oberstufenlehramtes an Allgemeinbildenden Schulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik
- elf Mathematiker und Mathematikerinnen aus Wirtschaft und Industrie als Referenten und Referentinnen
- drei Hochschullehrer der Mathematik und eine Hochschullehrerin der Mathematikdidaktik als Veranstalter

Folgende Modellierungsbeispiele wurden vorgestellt und bearbeitet:

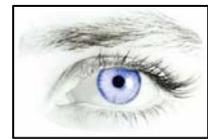
- Mathematische Methoden im Risikomanagement (Christoph Bäsler)
- Mathematik der privaten Krankenversicherung (Sabine Köhler)
- Mathematische und methodische Probleme der Fischereiwissenschaft (Claus-Peter Ortlieb)
- Bestmögliche Stationierung von Rettungshubschraubern in Südtirol (Claus-Peter Ortlieb)
- Strahlentherapieplanung bei Krebspatienten (Günther Gramlich)
- Ausrichtung und Vergleich von Molekülen („Molecular Alignment“) (Thomas Mietzner)
- Fingerprints (Steffen Scholze)

Bestandteil des Projektes war es weiterhin, dass alle Schülerinnen- und Schülergruppen ihre Ergebnisse am Ende des Projektes in einer gemeinsamen Veranstaltung vortragen und diese für eine Präsentation im Internet aufarbeiten. Außerdem war eine Exkursion mit der gesamten Gruppe Teil des Projektes.

Aufgabe dieser Ausarbeitung ist es, die verschiedenen Modellierungsbeispiele inklusive ihrer Bearbeitungen durch die Schülerinnen und Schüler sowie durch die Studierenden darzustellen. Außerdem soll eine Reflexion über die einzelnen Beispiele aber auch über die einzelnen Seminardurchläufe versucht werden.

Daher werden auf den nachstehenden Seiten für alle Modellierungsbeispiele folgende Punkte bearbeitet:

- Eine Problembeschreibung bzw. eine Darstellung der Modellsituation,
- die Problemlösungen der Schülerinnen und Schüler,
- die Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt,
- eine Problematisierung des Modellierungsverlaufes
- sowie weiterführende Ideen und Problemlösungen der Studierenden



- und letztlich eine didaktische Reflexion des Modellierungsablaufes.

Insgesamt sollen dann noch die drei Seminarzyklen beleuchtet und die Form des Seminars kritisch hinterfragt werden. Den theoretischen Hintergrund für die Modellierungsbeispiele sollen Betrachtungen zum Modellierungsprozess bilden.

Bei allen Teilen dieses Berichts wird auf die vorliegende Ausarbeitung der an dem Projekt beteiligten Studierenden und Lehrenden (teilweise wörtlich) zurückgegriffen.

## II. Der Modellierungsprozess

Der Begriff des mathematischen Modells existiert erst seit Ende des 19. Jahrhunderts, auch wenn aus heutiger Sicht rückblickend gesagt werden kann, dass bereits Kant im Jahr 1786 von mathematischen Modellen sprach, obwohl er dieses anders ausdrückte. Kant sagte, dass in jeder besonderen Naturlehre nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist. Aus heutiger Sicht könnte diese Aussage folgendermaßen formuliert werden: Nur der Gebrauch mathematischer Modelle macht eine Wissenschaft exakt. Es folgte, dass auch außerhalb der Physik, welche sich schon lange erfolgreich mathematischer Modelle bediente, zunehmend mathematische Modelle zur Betrachtung und zur Lösung von Problemen herangezogen wurden. Es gilt allerdings für die Verwendung jedes Modells, dass dieses auf seinen Wert und seine Gültigkeit geprüft werden muss.

Zu Beginn sollte man sich den Zweck eines mathematischen Modells überlegen, bevor man sich der Sinnhaftigkeit eines solchen zuwendet. Ziel der Modellierung ist es, eine reale Situation mathematisch darzustellen. Dies kann ein durchaus komplexer Prozess sein.

Zur Beschreibung des mathematischen Modellierungsprozess hat sich in der Mathematikdidaktik aus verschiedenen Ansätzen folgende Auffassung durchgesetzt (siehe Blum, 1995); dabei wird der Prozess der mathematischen Modellierung in vier Stufen eingeteilt:

- I. Reale Situation
- II. Reales Modell
- III. Mathematisches Modell
- IV. Mathematische Resultate

Dazu gehören untrennbar die vier Phasen für die Übergänge zwischen den Stufen:

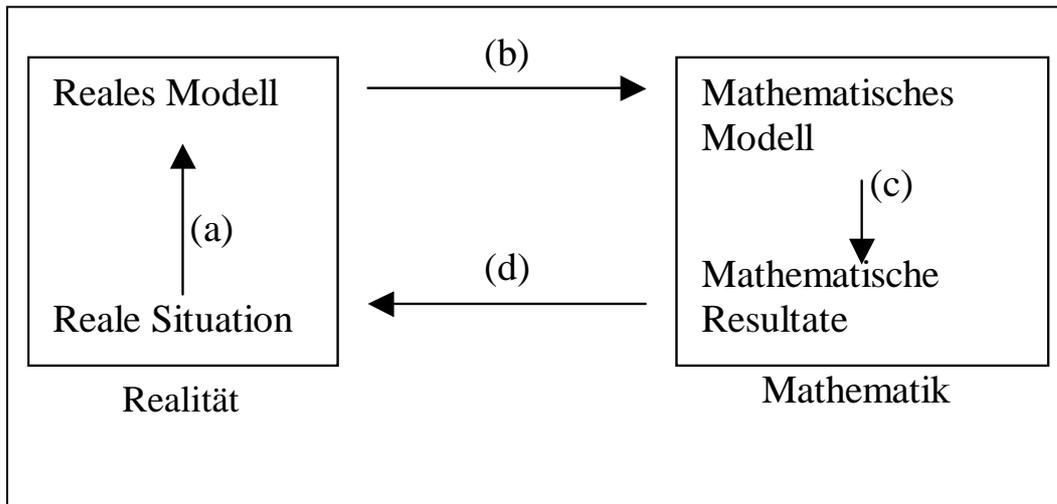
- a. Idealisierung (I)→(II)
- b. Mathematisierung (II)→(III)



- c. Modelluntersuchung (III)→(IV)
- d. Rückinterpretation (IV)→(I) bzw. zunächst (II) und Validierung

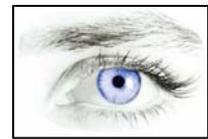
Dies lässt sich durch Abbildung 1 veranschaulichen:

**Abbildung 1: Der Modellierungsprozess**



Ausgangspunkt bei der mathematischen Modellierung ist eine reale Situation (zum Beispiel die Schaltung einer Ampel an einer Kreuzung. Wie lang sollte die Gelbphase einer Ampelschaltung sein?). Als erster Schritt muss nun ein reales Modell zur Beschreibung dieser Situation erarbeitet werden. Hierbei liegt der Fokus auf *einem* Modell, denn es gibt zur Beschreibung einer realen Situation meist mehr als ein Modell. (Wozu dient die Gelbphase einer Ampel? 1. Die Gelbphase einer Ampel dient dazu, dass niemand über "Rot" fährt. 2. Die Gelbphase einer Ampel dient dazu, dass die Kreuzung geräumt ist. Dies sind zwei völlig verschiedene Ansätze, mit unterschiedlichen zugrunde liegenden Modellen.) Um sich bei verschiedenen Modellen für eines zu entscheiden, ist es unerlässlich, Annahmen zu treffen, die für eines dieser Modelle sprechen. (Im oben genannten Beispiel könnte das beispielsweise die Gesetzgebung sein, die für Modell Nummer Eins spricht, denn niemand darf in Deutschland über "Rot" fahren. Außerdem muss zugrunde gelegt werden, dass sich jedes Auto in Ortschaften der Kreuzung mit einer Geschwindigkeit von maximal 50 km/h nähert.) Es wird ersichtlich, dass es sich im ersten Schritt der mathematischen Modellierung weniger um die Mathematik als um die Bewertung der Sinnhaftigkeit eines realen Modells handelt. Außerdem wird das Modell durch einschränkende Annahmen vereinfacht, sprich idealisiert.

Hat man nun ein reales Modell gefunden, beziehungsweise sich für eines entschieden, überträgt man dieses in die Mathematik und versucht, ein mathematisches Modell zur Beschreibung des realen Modells zu finden. (Im Beispiel könnte das die Dauer des Bremsvorgangs von der maximalen Geschwindigkeit zum vollkommenen Stopp vor der Haltelinie sein.) Hierbei sind



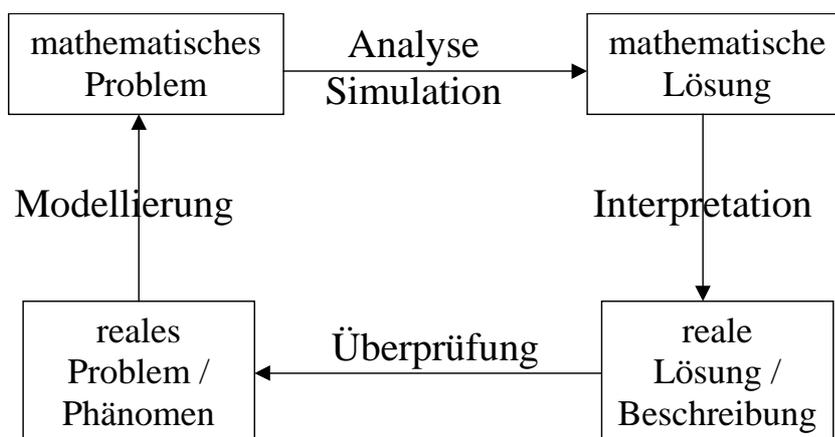
die getroffenen Annahmen zu berücksichtigen und in das Modell einzuarbeiten. Es ist dabei völlig klar, dass eventuell nicht alle Daten, die in den Annahmen gefordert sind auch wirklich zur Lösung des Problems beitragen oder alle benötigten Daten überhaupt vorhanden sind. Dies stellt eine große Anforderung an die Person, die ein Problem bearbeitet. Eventuell müssen zusätzliche Informationen besorgt oder Annahmen zu nicht vorhandenen Daten getroffen werden. Ist dies nicht ohne weiteres möglich, muss das reale Modell eventuell noch weiter vereinfacht werden.

Ist ein mathematisches Modell gefunden, kann nun eine Lösung errechnet werden. Diese mathematischen Resultate müssen nun aber noch rückinterpretiert werden. Dies bedeutet, dass die Plausibilität der Resultate anhand der realen Situation (bzw. ggf. zunächst anhand des realen Modells) überprüft werden muss. Denn es kann sein, dass sich die Resultate zwar schlüssig aus dem Modell ergeben, das reale oder mathematische Modell aber nicht mit der Realität übereinstimmt.

Ebenso müssen in diesem letzten Schritt die Grenzen des Modells aufgezeigt werden, da es möglich ist, dass dieses die reale Situation aufgrund der getroffenen Annahmen und vorgenommenen Vereinfachungen nur unvollständig beschreibt.

In der angewandten Mathematik finden sich etwas andere Beschreibungen des Modellierungsprozesses, wobei die folgende Darstellung eine weithin akzeptierte Auffassung wiedergibt:

Abbildung 2: Weitere Variante der Beschreibung eines Modellierungsprozesses



Beim Schritt des Validierens, über dessen Notwendigkeit Konsens besteht, sollen nach Hertz folgende drei Kriterien an ein Modell angelegt werden:

**Zulässigkeit:** "Als unzulässig sollten wir von vornherein solche Bilder bezeichnen, welche schon einen Widerspruch gegen die Gesetze unseres Denkens



in sich tragen.“ Ein Modell muss also präzise formuliert sein und darf keine Widersprüche in sich tragen.

**Richtigkeit:** “Unrichtig nennen wir zulässige Bilder dann, wenn ihre wesentlichen Beziehungen den Beziehungen der äußeren Dinge widersprechen.“ Dies kann beispielsweise durch Experimente überprüft werden, also durch außermathematische Methoden.

**Zweckmäßigkeit:** “Von zwei (zulässigen und richtigen) Bildern desselben Gegenstandes wird dasjenige das zweckmäßigere sein, welches mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes widerspiegelt als das andere; welches, wie wir sagen, das deutlichere ist. Bei gleicher Deutlichkeit wird von den zwei Bildern dasjenige zweckmäßiger sein, welches neben den wesentlichen Zügen die geringere Zahl überflüssiger oder leerer Beziehungen enthält, welches also das einfachere ist.“ (HERTZ, 1894)

Aus diesen Kriterien lassen sich folgende “Rezepte“ für die Modellierung ableiten:

Zunächst muss die reale Fragestellung möglichst präzise gefasst werden. Hierzu ist es meist sinnvoll sich zu überlegen, was wesentlich ist und was nicht.

Anschließend muss gefragt werden, welche Informationen benötigt werden. Sind alle Informationen vorhanden? Sind gegebene Informationen eventuell nutzlos?

Erst jetzt ist es sinnvoll, sich eine mathematische Fragestellung zu überlegen und diese wiederum präzise zu formulieren. Gegebenenfalls können auch mehrere Fragestellungen entwickelt werden, von denen dann nach den Kriterien von Hertz die beste ausgewählt wird.

Anfangs sollte radikal vereinfacht werden, um das Problem überhaupt erst einmal überschaubar zu gestalten und lösbar zu machen. Im Verlauf der Modellierung kann das Modell schrittweise erweitert werden.

Ist eine mathematische Lösung gefunden, muss diese anhand der Realität überprüft werden. Ist die Lösung überhaupt richtig? Wenn dies nicht der Fall ist, muss das Modell modifiziert werden.

Abschließend ist festzustellen, dass das Modell auf Zulässigkeit, Richtigkeit und Zweckmäßigkeit zu überprüfen ist. Hierbei müssen auch die Grenzen des Modells verstanden sein, um eine Bewertung vornehmen zu können.



### III. Die Modellierungsbeispiele

#### 1. Problem aus der Fischereiwirtschaft: Die Berechnung von Fischfangquoten

##### 1.1. Zusammenfassung

In diesem Beispiel geht es um die Ermittlung von Fischfangquoten; diese Quoten müssen im Spannungsverhältnis von ökonomischen Interessen und biologischen Rahmenbedingungen ermittelt werden. Einerseits besteht ein Interesse an großen Mengen gefangenem Fisch, um hohe Gewinne zu erzielen, eine Überfischung andererseits würde die Population der Fische zusammenbrechen lassen und damit zum Aussterben der Fische im Gewässer führen, was langfristig die Grundlage der Fischerei zerstört.

Die für die Modellierung verwendeten Daten setzen sich dabei aus zwei Gruppen zusammen. Einerseits sind dies die relativ leicht zugänglichen ökonomischen Daten wie die Anzahl der Boote, deren Einsatzdauer, laufende Kosten und Effizienz sowie die Marktpreise für den Fisch. Dem entgegenstehen die nur schwer oder gar nicht direkt messbaren Daten und Zusammenhänge, beispielsweise die Entwicklung einer Fischpopulation und die Einwirkung des Fischfanges darauf.

In einer ersten Vereinfachung kann ein Modell bearbeitet werden, in dem neben bekannten ökonomischen Daten von einem See bekannter Größe und bekannter maximaler Fischdichte ausgegangen wird; weiterhin wird ein exponentielles Wachstum der Population vorausgesetzt, deren Wachstumsrate abhängig von der Fischdichte ist.

In den Lösungsansätzen kann zuerst die Populationsentwicklung ohne Fischfang betrachtet werden. Hierbei wurden von den Schülerinnen und Schülern sehr verschiedene Zugänge gewählt. Teilweise wurden graphische Lösungsmethoden bevorzugt, andere haben lineare Zusammenhänge formuliert; ein weiterer Zugang war das Nachvollziehen einer rekursiven Gleichung. Bei der anschließenden Berücksichtigung des Fischfanges wurden insbesondere die linearen Ansätze weiterentwickelt zu verschiedenen rekursiven Formeln, deren Ergebnisse teilweise „von Hand“, teilweise mit Computer berechnet wurden. Aufgrund der Verschiedenartigkeit der Ergebnisse konnte hier weiterhin der Realitätsgehalt der einzelnen Ansätze innerhalb der Gruppe diskutiert werden; außerdem wurden im Rahmen der Behandlung dieses Projektes Bezüge zur Biologie hergestellt, weswegen das Modell ein gutes Beispiel für Verbindungen der Mathematik zu anderen Naturwissenschaften darstellt.



Das Modell bietet weiterhin gute Möglichkeiten zum Computereinsatz, um rekursive Rechnungen und Parametervariationen durchzuführen. Auch der Schwierigkeitsgrad der zu behandelnden Gleichungen kann steigen, so führen Fragen nach der Gewinnmaximierung auf die Ableitung und die Berücksichtigung vom Auftreten von Fischen in Schwärmen lässt Gleichungen höheren Grades zu.

### 1.2. Problemdarstellung (nach Ortlieb 2001: S.1)

Weltweit werden in jedem Jahr etwa 100 Millionen Tonnen Fisch gefangen, verarbeitet und gegessen. Der Endverbraucher zahlt heute in einem normalen Hamburger Fischladen etwa 8 € für 1 kg Dorsch. Angesichts dieser ökonomischen Dimension ist das Bestreben erklärlich, den Fischfang durch den Einsatz moderner Technik möglichst effektiv zu gestalten. Dies bedeutet aber einen erheblichen Eingriff in die Ökosysteme der Meere und Binnengewässer, was bei einem allzu effektiven Vorgehen auch die Gefahr mit sich bringt, der Fischerei ihre biologische und somit auch ökonomische Grundlage zu entziehen.

Daher steht die Fischereiwissenschaft unter dem Zwang, konkrete Zahlen als Empfehlungen für Fangquoten angeben zu müssen. Ziel dieser Empfehlung ist, die biologischen und ökonomischen Grundlagen der Fischereiwissenschaft langfristig zu sichern, wobei andererseits aber auch kurzfristige ökonomische Interessen zu beachten sind: So ist eine Fischereiflotte, die ein Jahr nicht eingesetzt werden darf, ökonomisch nicht zu halten und wird mehr oder weniger verschrottet. Der enge Bezug der Fischereibiologie zum Fischfang führt zu einer spezifischen Datenlage: Gut bekannt sind bestimmte ökonomische Daten wie Fangmengen oder die Anzahl der Boote und die Dauer ihres Einsatzes. Weniger gut bekannt ist die Entwicklung der Fischbestände und die Wirkung des Fischfangs auf sie. Die Biologie des Wassers unterscheidet sich von der des Landes methodisch dadurch, dass direkte Beobachtungen nicht möglich sind: Fische lassen sich im freien Wasser weder zählen, noch kann man ihnen zusehen, in welchem Maße sie sich gegenseitig fressen.

An dieser Stelle kommt die mathematische Theorie ins Spiel. Ihre Aufgabe ist es, aus den vorliegenden Daten auf diejenigen zu schließen, die man gerne hätte, und – wenn das nicht möglich ist – festzustellen, welche Daten zusätzlich erforderlich sind. Darüber hinaus kann sie, unabhängig von konkreten Daten, einen qualitativen Beitrag leisten, das Gesamtsystem mit seinen Verflechtungen von Ökologie und Ökonomie besser zu verstehen.

Die methodische Problematik besteht hier nun darin, dass die Daten, die man zur quantitativen Prognose auf der Basis mathematischer Modelle benötigen würde, in der Regel nur zu einem sehr geringen Teil bekannt sind.



Im Folgenden soll daher zuerst eine fiktive Modellsituation betrachtet werden, die dem Grundproblem der Fischerei, also dem Zusammenhang von Ökologie und Ökonomie, Rechnung trägt und deutlich macht, welche Daten mindestens benötigt werden.

### 1.3. Modellsituation (nach Ortlieb 2001: S.2)

In einem großen Binnensee wird Fischfang betrieben. Ohne Fischfang würde die Fischpopulation bis an ihre Kapazitätsgrenze wachsen. Die Kapazitätsgrenze ist eine gegebene Größe, die vor allem vom Nährstoffangebot im Wasser und dem sich daraus ergebenden Wachstum von Algen, Phytoplankton und Zooplankton bestimmt ist. Die Reproduktionsprozesse der Fische (Laichen, Brut, Aufzucht) begrenzen die maximale spezifische Wachstumsrate der Population.

Die jährliche Fangmenge ist abhängig von der Anzahl der eingesetzten Boote. Pro Boot werde unter günstigsten Bedingungen (maximale Fischdichte) jährlich eine bestimmte Menge Fisch gefangen. Pro Boot fallen bestimmte jährliche Unterhalts- und (auf die gesamte Lebensdauer des Bootes umgelegte) Anschaffungskosten an. Für den Fisch erhalten die Fischer einen festen Preis.

Folgende Zahlenwerte sollen in dieser ersten Modellsituation zu Grunde gelegt werden:

- Seegröße:  $100 \text{ km}^2$
- Maximale Fischdichte pro  $\text{km}^2$ :  $K = 10000 \text{ t}$
- Maximale exponentielle Wachstumsrate der Fischpopulation:  $a = 0,9 \text{ 1/Jahr}$
- Maximale jährliche Fangmenge Fisch pro Boot:  $f = 300 \text{ t}$
- Jährliche Unterhaltskosten pro Boot:  $q = 60000 \text{ €}$
- Preis für jede Tonne angelandeten Fisch:  $p = 750 \text{ €}$

Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass die maximale Wachstumsrate der Population für sehr kleine Fischbestände erreicht wird und dass die Wachstumsrate mit wachsender Fischdichte kontinuierlich sinkt, bis sie schließlich bei einer Fischpopulation der Größe  $K$  Null wird.

### 1.4. Problemlösungen

#### 1.4.1. Ansätze der Schülerinnen und Schüler

In diesem Teil soll es um eine ergebnisorientierte Darstellung des Modellierungsprozesses gehen, den die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums Oberalster durchlaufen haben.



Nach der Klärung der oben beschriebenen Modellannahme haben sich die Schülerinnen und Schüler in drei kleine Untergruppen aufgeteilt, die getrennt versucht haben, ein vom Fischfang unbeeinträchtigt Fischpopulationswachstumsmodell zu entwickeln. Hierbei sollte errechnet werden, wie lange eine Fischpopulation braucht, um von  $x = 0.1 K$  ( $K = 10000$  t Fisch) auf  $0.9 K$  zu wachsen.

Die *erste Gruppe* hat versucht, über die Erstellung eines linearen Zusammenhanges zwischen der maximalen Wachstumsrate und der Kapazitätsgrenze des Sees, eine Formel für das Wachstum der Fischpopulation zu entwickeln. Die Schülerinnen und Schüler haben angenommen, dass beim Erreichen der Kapazitätsgrenze das Wachstum Null ist und dass die maximale Wachstumsrate bei einer gegen Null gehenden Population erreicht wird. Folgende Formel ließ sich aus dieser Darstellung ableiten:

$$A(x) = -\frac{a}{K} \cdot x + a \quad ^1$$

Die *zweite Gruppe* hat die Formel für das logistische Wachstum dem Anhang des Handouts von Claus Peter Ortlieb entnommen, hat erarbeitet, was die Komponenten im einzelnen bedeuten und hat daraus folgende Formel für das Populationswachstum der Fische entwickelt:

$$\text{Bestand (Jahr 1)} = \text{Bestand (Jahr 0)} + \text{Wachstumsrate} \cdot \text{Bestand (Jahr 0)},$$

wobei:

$$\text{Wachstumsrate (Jahr j)} = \frac{\text{max. Wachstumsrate} \cdot (1 - \text{Bestand (Jahr j)})}{(\text{max. Kapazität})}$$

Die *dritte Gruppe* hat sich dem Problem graphisch genähert. Zuerst hat sie sich überlegt, dass, wenn man die Zeit gegen Unendlich streben lässt, die Fischpopulation gegen die Kapazitätsgrenze streben muss. Die zugehörige Funktionsgleichung müsse in etwa einer umgekehrten e-Funktion entsprechen. Des Weiteren müsse die Kurve aber anfangs anders aussehen, weil gar nicht genügend Elternfische vorhanden seien, um der umgekehrten e-Funktion entsprechend genügend Nachkommen zu produzieren. Es wurde also angenommen, dass die Kurve anfangs eher den Charakter einer quadratischen Funktion habe. Im weiteren Verlauf hat sich diese Gruppe dann noch Gedanken über die Darstellung der beiden Graphenteile als Funktionsgleichung gemacht. Hierbei ging es vor allem darum, über die Ableitung einen Punkt mit gemeinsamer Steigung zu finden, um die Funktion dann stückweise definieren zu können.

---

<sup>1</sup> Mit  $a$ : = maximale Wachstumsrate,  $K$ : = Kapazitätsgrenze des Sees,  $A(x)$ : = Wachstumsrate bei einer Population von  $x$



Im Folgenden wurden anhand der Formeln Berechnungen angestellt und die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen wurden allen vorgestellt. Hierbei lag das größte Problem in dem Unterschied zwischen  $a$  und  $A$ , der von der gesamten Gruppe zeitweise nicht gesehen wurde, so dass mit einem nicht festen  $a$  gerechnet wurde.

Danach ist die Gruppe zur zweiten Aufgabe übergegangen. Hier wurde das Modell erst einmal präzisiert. Es wurde davon ausgegangen, dass die Fische zufällig im See verteilt sind, und dass die Fischer ihre Netze zufällig auswerfen.

Ziel war es dann, das Modell des Fischbestandes um den Fang eines Bootes zu erweitern. Es wurde wieder in kleineren Gruppen gearbeitet und am Ende der Sitzung konnten die ersten Ergebnisse präsentiert werden.

Eine Gruppe hatte folgendes Modell erstellt:

$$B_1 = B_0 + B_0 \cdot a \cdot \left(1 - \frac{B_0}{K}\right) - 0,03 \cdot B_0^2$$

Es bestand allerdings noch Diskussionsbedarf, was mit der Fischdichte geschieht, wenn man ein zweites Boot hinzu nimmt, da die Dichte durch das gleichzeitige Fangen eines anderen Bootes für das zweite Boot abnehmen müsste.

Des Weiteren kam Unzufriedenheit mit den bisherigen Modellen auf, weil sie nur numerisch und nicht analytisch gelöst werden konnten. So hatte sich eine Gruppe auch fast ausschließlich mit der Suche nach einem analytischen Ausdruck für die bisher nur numerischen Lösungsansätze beschäftigt.

Am Anfang dieser Sitzung tauchten drei verschiedene numerische Formeln zur Berechnung der Fischpopulation mit Fang auf. Sie waren entstanden, weil einige Schülerinnen und Schüler versucht hatten, sich zu Hause die in der letzten Sitzung entwickelte Formel erneut herzuleiten.

Folgende Formeln waren vorhanden:

$$1. \quad B_{i+1} = B_i \cdot \left(1 + a \left(1 - \frac{B_i}{K}\right)\right) - F \cdot B_i \cdot n$$

$$2. \quad B_{i+1} = (B_i - (F \cdot B_i \cdot n)) \cdot \left(1 + a \left(1 - \frac{B_i}{K}\right)\right)$$

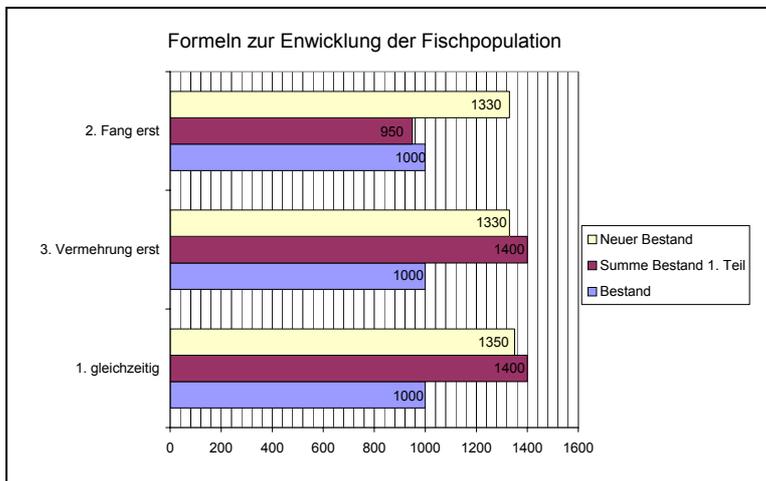
---

<sup>2</sup>  $B_1$  = Neuer Bestand (nach einem Jahr),  $B_0$  = Alter Bestand,  $a$  = maximale Wachstumsrate,  $K$  = Kapazität des Sees,  $0,03$  = der Anteil, den ein Boot nach dem vorliegenden Modell vom Bestand abfischt.



$$3. \quad B_{i+1} = \left( B_i \left( 1 + a \left( 1 - \frac{B_i}{K} \right) \right) \right) \cdot (1 - F \cdot n) \quad ^3$$

**Abbildung 2: Formeln zur Entwicklung der Fischpopulation**



Bei allen Formeln ist  $n$  die Anzahl der Boote. Im Laufe der Sitzung hat man sich darauf geeinigt, dass der See so groß ist, dass sich die Fischdichte für mehrere Boote, die gleichzeitig fischen, nicht verändert. Des Weiteren wurde  $F$  eingeführt, um auch verschie-

den große Boote einsetzen zu können.

Nach einigen Rechnungen, die sowohl per Hand als auch am PC mit Excel durchgeführt wurden, stellte sich heraus, dass die einzelnen Formeln zu stark unterschiedlichen Ergebnissen führten. Das Problem bestand somit darin, sich auf die Formeln zu einigen, die die Realität am ehesten widerspiegelt. Dazu wurde sich anhand eines Balkendiagramms (siehe Abbildung 2) klar gemacht, dass in der ersten Formel die Fische sich gleichzeitig vermehren und gefangen werden, in der zweiten erst gefangen wird und dann die Vermehrung stattfindet und in der letzten erst die Vermehrung stattfindet, bevor dann gefangen wird.

Das Problem war damit aber noch nicht gelöst, weil die Gruppe sich nicht einigen konnte, welches Modell der Realität am nächsten liegt.

In der Diskussion wurde nebenbei das noch aus der ersten Sitzung ausstehende Problem des eigentlich festen  $a$  gelöst. Die Einigung auf eine Formel wurde aber vorerst, mit dem Ziel einen Biologen zu fragen, vertagt.

Am Ende der Sitzung kam zufällig ein Biologielehrer der Schule herein und wurde mit Fragen über Vermehrung und Fischfang gelöchert. Nach dieser ‚Expertenauskunft‘ kam die Gruppe zu dem Ergebnis, dass die erste Formel die beste sei, weil Fische Eier legen und diese nicht in den Netzen landen. Um die Formel endgültig zu legitimieren, einigte man sich darauf, dass das Jahr mit der

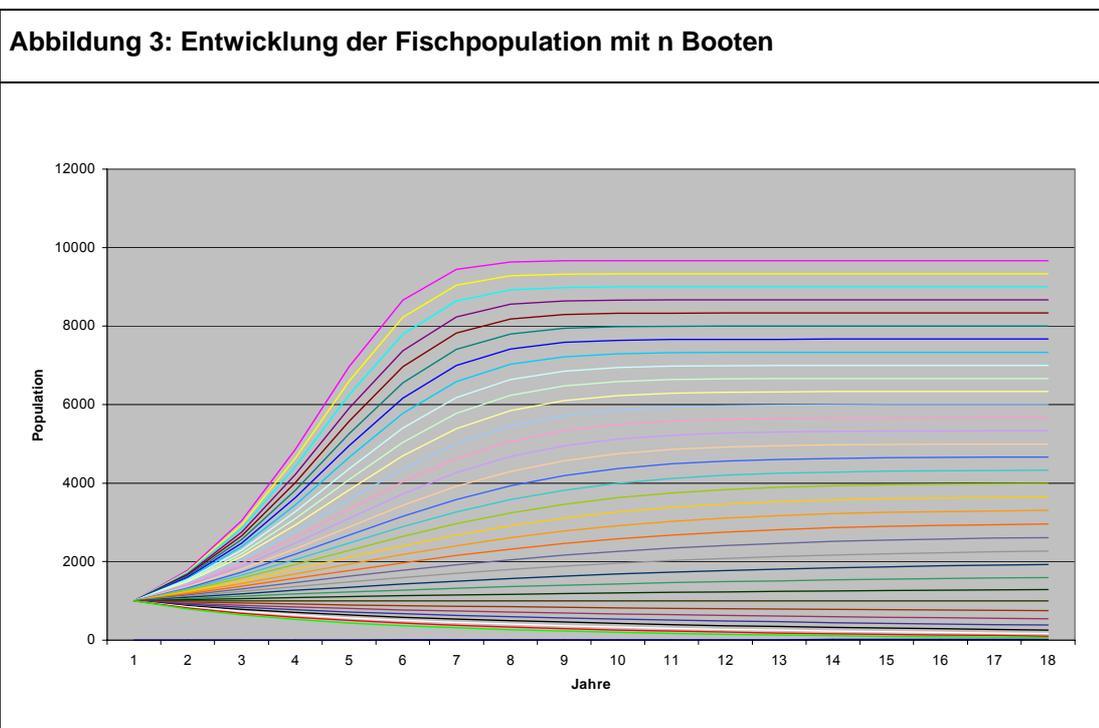
<sup>3</sup> Variablen wie in Fußnote 2, mit  $F = 0,03$ ,  $n =$  Anzahl der Boote.



Laichzeit beginnt und dass die Maschen der Fischernetze so groß sind, dass die Fische genau nach einem Jahr darin hängen bleiben.

Letztlich wurden noch die ersten mit Excel numerisch ermittelten Ergebnisse des Populationswachstums mit Fang vorgestellt. Hierbei wurde in den Zeilen die Zahl der Jahre fortgeführt und in den Spalten die Anzahl der Boote variiert. In Abbildung 3 ist eine graphische Darstellung der Ergebnisse zu sehen.

Peter Stender, der betreuende Lehrer war in der folgenden Sitzung der Meinung, dass das bisher entwickelte Modell logistischen Wachstums nicht ausreichend die Wirklichkeit widerspiegelt, weil in diesem Modell die Population (ohne Fang) nie abnehmen kann, in der Natur aber durchaus bei zu starker Vermehrung im nächsten Jahr nicht genug Nahrung vorhanden sein kann, so dass die Population sinkt.



Da bei seinem Modell aber eine wesentlich höhere Kapazitätsgrenze für ein Gewässer vorhanden sein muss, wurde beschlossen, Claus Peter Ortlieb zu fragen, welches Modell von logistischem Wachstum seiner Kapazitätsgrenze zu Grunde liegt.

In der Rücksprache mit Claus Peter Ortlieb wurde bestätigt, dass die bisherige Modellannahme von logistischem Wachstum der im Modell gegebenen Kapazitätsgrenze zu Grunde liegt. Somit war es ohne ein Ausscheren aus dem vorgegebenen Modell nicht möglich, das Modell von Peter Stender, das von einem großen Teil der Gruppe als realistischer angesehen wurde, weiter zu verfolgen.



In der letzten Phase des Modellierungsablaufes war die Gruppe in zwei Teile unterteilt. Der erste Teil arbeitete an einer Präsentation der bisherigen Ergebnisse und der zweite führte die Modellierungsarbeit fort.

In der Modellierungsgruppe wurde zunächst per Computer errechnet, wie sich die Populationszahlen auf den Nettoverdienst auswirken. Hierzu wurde die sich einpendelnde Menge<sup>4</sup> an gefangenem Fisch bei den verschiedenen Bootszahlen errechnet und dann mit den Einnahmen pro Tonne Fisch multipliziert. Danach wurden noch in jeder Spalte die Unterhaltskosten für die entsprechende Anzahl an Booten abgezogen, so dass man den zugehörigen Gewinn erhielt.

Nun wurde anhand dieser Ergebnisse geklärt, wie viele Boote sinnvollerweise eingesetzt werden sollten, wenn die Fischereirechte exklusiv in einer Hand lägen, und wie viele Boote eingesetzt würden, wenn es Konkurrenz gäbe.

Im Falle eines Monopols würden 11 Boote den maximalen Gewinn bringen, bei Konkurrenz würden sich 22 Boote noch rentieren, da bei 22 Booten die Einnahmen genau die Unterhaltskosten decken würden.

Als Nebenprodukt bei diesen Rechnungen viel eine analytische Lösung zur Berechnung der Fischbestandszahlen ab. Da sich der Fischbestand immer irgendwann eingependelt hatte, hat die Gruppe beschlossen, einfach Fang und Vermehrung gleich zu setzen.

$$B_i \cdot a \cdot \left(1 - \frac{B_i}{K}\right) = F \cdot B_i \cdot n$$

$$\Rightarrow B_i = K \cdot \left(-0,03 \cdot \frac{n}{a} + 1\right)$$

Eingesetzt in die schon berechnete Formel für den Gewinn erhält man:

$$G = 0,03 \cdot \left(K \cdot \left(-0,03 \cdot \frac{n}{a} + 1\right)\right) \cdot p - y \cdot n$$

$$\Rightarrow G = -0,03^2 \cdot \frac{K \cdot p \cdot n^2}{a} + (0,03 \cdot p \cdot K - q) \cdot n$$

Um den maximalen Gewinn pro Boot zu errechnen, wurde nun die Ableitung gebildet:

$$G' = -2 \cdot p \cdot 0,03^2 \cdot K \cdot \frac{n}{a} + p \cdot 0,03 \cdot K - q$$

Die Ableitung wurde dann gleich Null gesetzt:

---

<sup>4</sup> Vergleiche Abb.: 2.

<sup>5</sup>  $p$  = Preis für den angelandeten Fisch,  $q$  = Unterhaltskosten pro Boot,  $G$  ist der Gewinn.



$$-p \cdot 0,03 \cdot K - q = -2 \cdot p \cdot 0,03^2 \cdot K \cdot \frac{n}{a}$$

$$\Rightarrow (p \cdot 0,03 \cdot K - q) \cdot \frac{a}{2} \cdot p \cdot 0,03^2 \cdot K = n$$

Mit  $a = 0,9$ ;  $K = 10000$ ;  $p = 750 \text{ €}$  und  $q = 60000 \text{ €}$  folgt:

$$n = 11$$

Die numerische Lösung war somit analytisch bestätigt.

Zuletzt hat sich die Gruppe noch mit der Änderung der Annahme, dass die Fische sich eben nicht zufällig im See verteilen, beschäftigt. Da Fische in Schwärmen auftreten und so per Echolot zu orten sind, sind Fangmenge und Fischbestand nicht proportional zueinander. Vernachlässigt man die für die Ortung benötigte Zeit, die natürlich von der Population abhängt, so kommt jedes Boot, solange überhaupt noch Fische da sind, auf seine maximale Fangmenge. Dies ist eine neue Modellannahme, die dann die Fragen aufwirft, wie sich der Fischbestand nun in Abhängigkeit von der Zahl der eingesetzten Boote entwickelt und wie sich das auf den Nettoverdienst der Fischer auswirkt.

Die Veränderung der Fangzahlen wurde von den Schülerinnen und Schülern in die Errechnung des analytischen Ausdrucks eingefügt, so dass sich für den eingependelten Bestand nach Anwendung der P-Q Formel folgende neue Lösung ergab:

$$B_{\tilde{z}_1} = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 300 \cdot n \cdot \frac{k}{a}} \quad \text{bzw.} \quad B_{\tilde{z}_2} = \frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 300 \cdot n \cdot \frac{k}{a}}$$

Somit ergaben sich auch zwei mögliche Lösungen für den maximalen Gewinn, wobei die Gruppe versuchen wollte, die Richtige der beiden numerisch zu ermitteln.

Am Gymnasium Heidberg wurden ähnliche Ergebnisse erzielt, weshalb auf die Darstellung des Modellierungsprozesses dieser Gruppe an dieser Stelle verzichtet werden soll. Einen Einblick in die Arbeit dieser Gruppe kann man unter [www.math.uni-hamburg.de/home/struckmeier/Modellierung/schulen/gyhe/fisch/](http://www.math.uni-hamburg.de/home/struckmeier/Modellierung/schulen/gyhe/fisch/) bekommen.

#### 1.4.2. Weiterführende Ideen der Studierenden

Da sich die Studierenden der beiden an diesem Projekt beteiligten Schulen von vornherein das Ziel gesetzt hatten, mit den Schülerinnen und Schülern den Modellierungsprozess gemeinsam zu durchlaufen bzw. nicht initiativ zu werden und dieses auch durchgehalten wurde, ist es zu keinen spezifischeren Ansätzen oder Lösungen des Problems durch die Studierenden gekommen. Sie sahen ihre



Aufgabe viel mehr in der Reflexion der im Modellierungsablauf aufgetretenen Probleme und Prozesse bzw. in der Begleitung des Modellierungsprozesses und der Steigerung der Effizienz der Arbeit der Schülerinnen und Schüler.

#### 1.5. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt

Die Schülerinnen und Schüler beider mit diesem Thema befassten Schulen haben das Projekt sehr positiv aufgenommen.

Für die sehr mathematikbegeisterte Gruppe am Gymnasium Oberalster war es eine willkommene Gelegenheit auch in der Freizeit noch Mathematik zu betreiben. Zum Ende des Durchlaufes wurde sogar der Wunsch geäußert das Projekt weiter fortzuführen.

Als störend wurde von dieser Gruppe die Vorgabe empfunden, eine Präsentation der eigenen Ergebnisse vorbereiten zu müssen. Alle in der Gruppe hätten die Zeit lieber genutzt, um weiter an dem Projekt zu arbeiten und die Modellierungsarbeit fortzuführen. Gerade auf Grund der freiwilligen Form des Projektes, war es schwer die für die Präsentation nötige Motivation bei den Schülerinnen und Schülern zu erzeugen.

Die Modellierungstätigkeit an sich ist der Gruppe am Gymnasium Oberalster nicht sonderlich schwergefallen, weil die Schülerinnen und Schüler es aus ihrem Unterricht gewohnt waren, mit offenen und komplexen Fragestellungen umzugehen und sie gemeinsam zu bearbeiten.

Am Gymnasium Heidelberg hatte die Gruppe anfangs etwas Schwierigkeiten, mit der für sie ungewohnten Modellierungssituation umzugehen. Nach kurzer Zeit jedoch hat sich die Gruppe gut in das Thema eingearbeitet und die Modellierung begann den Schülerinnen und Schülern dieser Gruppe Spaß zu machen. Die Gruppe hat von sich selbst gesagt, dass sie in diesem Projekt gelernt hat, unbekannte Probleme anzugehen und durch mathematisches Modellieren zu lösen. Außerdem habe man in diesem Jahr gelernt, vom Unterrichtsstoff abweichende Probleme selbständig zu lösen.

Letztlich hat auch der Gruppe des Gymnasiums Heidelberg die Modellierungsarbeit so viel Spaß gemacht, dass sie überlegt hat, sich im folgenden Schuljahr erneut einem Modellierungsproblem zu stellen.

#### 1.6. Didaktische Reflexion und Problematisierung des Modellierungsprozesses

Das mathematikdidaktische, „pragmatische“ Ziel (Kaiser 2000) des Seminars, die Befähigung der Schülerinnen und Schüler anzustreben, reale mathemathhaltige Probleme aus Alltag, Umwelt und Wissenschaft mit Hilfe mathematischer



Modellierung bearbeiten und lösen zu können, wurde mit diesem Beispiel in großen Teilen erreicht.

Die Schülerinnen und Schüler haben Annahmen getroffen, reflektiert und auch verworfen, sie haben die Grenzen aber auch die Möglichkeiten der Mathematik erfahren und ihnen wurden Verknüpfungen zwischen Realität und Mathematik aufgezeigt. Sie haben also Mathematik als Prozess erlebt und über die Güte und den Nutzen dieses Prozesses diskutiert. Sie haben die Mathematik als lebendige Wissenschaft erleben können, in der es nicht um richtig oder falsch geht sondern darum, ob eine Annäherung an eine Fragestellung angemessener ist als eine andere.

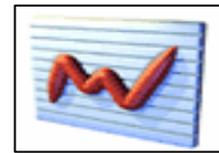
Außerdem würden durch die Gruppenarbeitsform die Teamkompetenz geschult und durch die Modellierungssituation Motivation und Kreativität bei den Schülerinnen und Schülern gefördert. Dies hilft auch, den Blick auf Sinn und Zweck der Mathematik zu schärfen. Nebenbei wurde der sinnvolle Computereinsatz trainiert, indem der Rechner zur Veranschaulichung und als Rechenknecht, sowie zur graphischen und tabellarischen Aufarbeitung der Ergebnisse genutzt wurde.

Etwas anders sieht die Reflexion aus Sicht der Studierenden aus:

Am Gymnasium Oberalster waren die Studierenden dieser Gruppe der Meinung, nicht genügend Modellierungserfahrung zu besitzen, um moderierend die Gruppe von Schülerinnen und Schülern zu leiten. Daher wurde beschlossen, in kleinen Gruppen den Modellierungsprozess mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam zu durchlaufen. Um über diesen Prozess reflektieren zu können, ließen die Studierenden eine Videokamera mitlaufen und versuchten am Ende jeder Sitzung mit der Gruppe gemeinsam zu evaluieren, welche Arbeitsweisen sich als effektiv und welche sich als ineffektiv erwiesen hatten.

Die Arbeit am Gymnasium Oberalster war aber auch ohne Modellierungserfahrung der Studierenden sehr unproblematisch. Die Schülerinnen und Schüler an diesem Gymnasium waren offene Unterrichtsformen aus dem eigenen Mathematikunterricht gewohnt und die gesamte Gruppe war in der Lage mathematisch auf einem sehr hohen Niveau zu diskutieren. Außerdem waren die Gruppenmitglieder so mathematikbegeistert, dass sie sich freiwillig gerne Nachmittags in einer Art AG traf.

Letztlich bleibt festzuhalten, dass die eigentlich nicht hinreichend vorgebildeten Studierenden am Gymnasium Oberalster auf eine so gut vorbereitete Gruppe von Schülerinnen und Schülern traf, dass Probleme, die aus dem Mangel an Modellierungserfahrung der Studierenden hätten auftreten können, nicht aufgetreten sind.



## 2. Mathematische Methoden im Risikomanagement

### 2.1. Zusammenfassung

Dieses Thema befasst sich mit Risikomanagement, hier also der Kontrolle von Risiken bei finanziellen Transaktionen. Diese Risiken sind zum Beispiel Unsicherheiten über Kursentwicklungen von Aktien oder Schwankungen von Devisenkursen. Das übergeordnete Problem ist die Erfassung und Einschätzung dieser Risiken. Das Modell bietet daher viele mögliche konkretere Fragestellungen, so die Frage nach der Modellierung von Aktienkursen, um anhand stochastischer Aussagen über die Kursentwicklung die Risiken großer Wertverluste einzuschätzen. Eine andere mögliche Frage ist die nach dem Einsatz von Optionen zur Risikoeinschätzung.

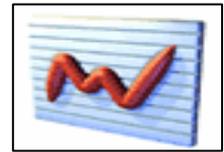
Für die Bearbeitung des Problems haben sich die Schülerinnen und Schüler zuerst mit den grundlegenden Begriffen und Instrumenten des Finanzwesens vertraut gemacht. Dazu gehören beispielsweise die Aktienindices (DAX, Dow Jones etc.) und deren Entstehung, generelle Grundlagen des Aktienwesens, Einflüsse auf Aktienkurs- und Währungsentwicklungen oder der Begriff der Option. Weiterhin haben sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer auch mit börsenüblichen Darstellungsweisen von Aktienwerten, so der Candle-Darstellung, befasst.

In der mathematischen Bearbeitung des Problems bieten sich wegen der nicht sicheren Prognostizierbarkeit von Aktienkursen stochastische Modelle an. So lassen sich Kursentwicklungen anhand eines Random – Walk – Modells darstellen und das Risiko kann beispielsweise anhand von Erwartungswerten und Standardabweichungen abgeschätzt werden. Im Rahmen des Random – Walk – Modells sind außerdem Bezüge zur Binomialverteilung oder zum Testen von Hypothesen möglich. Ein anderer von einigen Teilnehmerinnen und Teilnehmer gewählter Zugang zum Risiko war das Abschätzen des Risikos anhand vorliegender Daten; hierbei wurden vor allem Kursschwankungen untersucht und unterschiedlich gewichtet.

Die Schülerinnen und Schüler haben weiterhin versucht, Kursprognosen aus vorliegenden Kurswerten zu erstellen, insbesondere mit Hilfe des arithmetischen Mittels.

### 2.2. Problemdarstellung

Geld- und Devisengeschäfte sind durch die Bedingungen auf den internationalen Märkten mit verschiedenen Risiken behaftet (Ausfall- oder Kreditrisiko, Markt-



und Ländertransferrisiken u.a.<sup>6</sup>). Um unerwartete größere Verluste von Investoren bzw. Anlegern zu vermeiden, sollten diese Risiken überwacht werden. Der Begriff „Risiko“ ist dabei – ähnlich wie der Begriff „Chance“ – problematisch, da er im Alltag häufig verwendet wird, ohne dass dieser genau definiert wird. Dennoch besteht eine gewisse Anschauung bzw. Intuition darüber, was darunter zu verstehen sein könnte. Dies kann unter Umständen einige Irritationen bei den Lernenden hervorrufen und führt vielleicht auch zu Schwierigkeiten bei der Formalisierung und Mathematisierung, wenn Prä-Konzepte diesen Bemühungen entgegen stehen.

Risiko könnte man z.B. über die bei einem Geschäft möglichen Verluste bzw. besser deren Erwartungswerte, die mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes berechnet werden können, definieren. Mit diesem Definitionsansatz befindet man sich im Bereich der Stochastik und verlässt somit die deterministische mathematische Welt.

Für die Kontrolle von Risiko wäre es nützlich, die Entwicklungen und Kursverläufe für zukünftige Zeitpunkte möglichst genau vorherzusagen, was jedoch schwierig ist, da die exakten Kurse auf Grund der Vielzahl der einwirkenden Faktoren faktisch nicht zu erheben sind. Dies führt zwangsläufig zu einem stochastischen Modell, welches häufig durch einen Random-Walk repräsentiert wird. Dieser ist auch unter dem Begriff der „Irrfahrt“ in der stochastischen Fachliteratur<sup>7</sup> zu finden.

Der Eingangsvortrag von Herrn Dr. Bäsler hatte das Risikomanagement zum Thema, d.h. die professionelle Kontrolle von Risiko im Finanzsektor. Hierbei ging es speziell um das Instrument „Option“, welches zur Risikoabsicherung beim Handel mit Wertpapieren und Währungen dient. Als Modell für den Verlauf von Währungs- oder Aktienkursen wurde ein geometrischer Binomialprozess vorgestellt und anhand eines Beispiels erläutert.

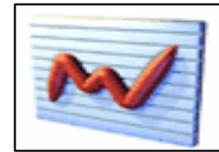
Als Anregung für die Kursarbeit hatte Herr Dr. Bäsler einige Fragestellungen entworfen, die auf das Nachvollziehen des von ihm verwendeten Modells abzielten (Beispielrechnung, Simulation, Variation). Abschließend sollte eine Interpolation des Kursverlaufs durch Polynome diskutiert werden.

Diese Anregungen wurden von beiden Kursen, die dieses Modellierungsbeispiel ausgewählt hatten, bewusst nicht aufgegriffen, da diese dem Ansatz des

---

<sup>6</sup> Zur genaueren Betrachtung der Risiken empfehlen wir Spezialliteratur oder aber z.B. Informationsbroschüren von Banken und Sparkassen; etwa: Volks- und Raiffeisenbanken: Basisinformationen über die Vermögensanlage in Aktien und Genussscheinen, 1999.

<sup>7</sup> Siehe z.B.: Chung, K.L., 1978, Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin.



Seminars, nämlich der eigenen, selbstständigen Modellierung eines realen Problems, widersprachen. Dadurch existierte wiederum kein klar umrissenes Problem für den Unterricht; lediglich ein großer Themenbereich war damit gegeben, der somit noch von den Schülerinnen und Schülern spezifiziert werden musste.

## 2.3. Problemlösungen

### 2.3.1. Ansätze der Schülerinnen und Schüler

Das Thema wurde von zwei Kursen gewählt. In beiden Gruppen wurde schnell klar, dass die Spezialbegriffe und die grundlegenden Prinzipien des Börsenhandels erarbeitet werden mussten, um einen Überblick über das komplexe Feld zu erhalten. Da die explizite Fragestellung zu Beginn der Arbeit in der Schule fehlte, mussten bzw. durften beide Kurse ein eigenes konkretes Problem für ihr jeweiliges Projekt formulieren. Die Suche nach einer geeigneten und spannenden Fragestellung benötigte jedoch einige Zeit.

### 2.3.2. Gruppe Gymnasium Tonndorf

Zur Konkretisierung der Problemstellung wurden am Gymnasium Tonndorf mit den Schülerinnen und Schülern im Anschluss an eine grundlegende Diskussion mehrere Fragestellungen formuliert:

- Wie entsteht der Wert einer Aktie?
- Wie entstehen Indizes wie DAX und Dow Jones?
- Wie entwickeln sich Währungen, insbesondere der Euro?
- Wodurch werden Aktienkurse beeinflusst?
- Wie kann man die Entwicklungen von Aktienkursen vorhersagen?

Bevor jedoch diese Fragestellungen weiter verfolgt werden konnten, ging es zunächst um die Erarbeitung von Grundlagen und gängigen Techniken im Börsenbereich. Das Feld in diesem Gebiet ist riesig und zum größten Teil alltags- und schulfremd.

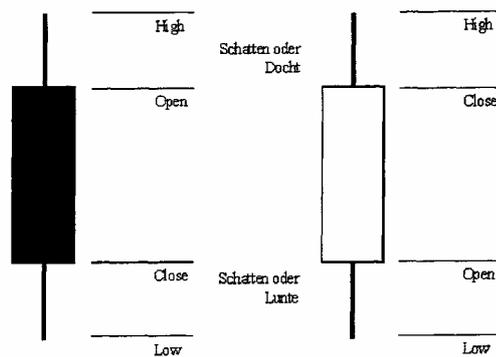
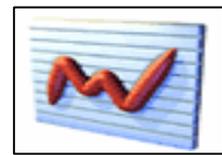


Abbildung 4: Candle-Darstellung

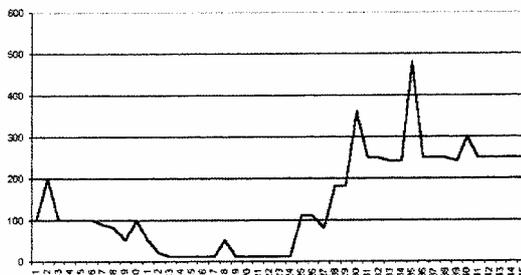


Abbildung 5: Linien-Darstellung

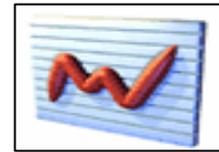
Die Gruppe beschäftigte sich intensiv mit etablierten Methoden zur Visualisierung von Kursverläufen, wie z.B. den Candle-Diagrammen (siehe Abbildung 4) oder den Linien-Diagrammen (siehe Abbildung 5). Ebenso behandelten sie Techniken zur Interpretation der Verläufe sowie zur Vorhersage von Trends auf der Basis von Erfahrungswerten. Hierzu gibt es eine Reihe von gängigen Regeln, die anhand bestimmter Konstellationen Aussagen über mögliche Entwicklungen erlauben sollen. Innerhalb dieses Projekts sind diese zum Teil sehr komplexen Analyseverfahren als unbefriedigend einzustufen, da sie – wenn überhaupt – nur nachvollzogen werden können, und keine eigenständige Modellierung stattfinden kann.

Die Beschäftigung mit diesen Themen nahm in dieser Gruppe einen vergleichsweise großen Stellenwert ein. Das führte dazu, dass die Zeit für die eigentlichen Modellierungstätigkeiten eher geringer ausfiel als dies zu wünschen gewesen wäre.

Die Frage nach der Vorhersage der Kurse (siehe Seite 24) steht in der folgenden Darstellung im Vordergrund, da sie sich am stärksten mit den Intentionen des Seminars deckt. Zur Lösung dieser Problematik wurden von zwei Gruppen unterschiedliche Modelle entworfen. In der Darstellung werden bewusst die einzelnen Modifikationsschritte dargestellt, um den stattgefundenen Prozess zu verdeutlichen.

### 2.3.2.1 Modell 1: „Deterministische Vorhersageformel“

Inspiziert von den vorherigen Analysetechniken, wollte die Gruppe ebenfalls eine Prognose aus den Daten der Vergangenheit anstellen. Hierfür wurde ein deterministischer Ansatz gewählt, der einen einzigen Kurswert für die Zukunft angeben soll. Die Schülerinnen und Schüler wollten eine Formel entwickeln, die den Aktienkurs  $A_n$  in  $n$  Tagen berechnen soll. Dafür verwendeten sie das



arithmetische Mittel aller Kurswerte der letzten 38 Tage und bildeten aus diesem Mittelwert und dem Tiefstwert der letzten drei Monate erneut einen Mittelwert:

$$A_n = \frac{D_{38A} + T_{3M}}{2} \quad \text{Formel 1}$$

$A_n$  : Aktienkurs in  $n$  Tagen

$D_{38A}$  : 38-Tage-Durchschnitt am Berechnungstag

$T_{3M}$  : Tiefstwert in den letzten drei Monaten

Es wird also aus einem mittleren Wert und dem Minimum eines gewissen Zeitraums eine Vorhersage getätigt. Die Wahl der eingehenden Variablen bleibt beinahe unbegründet. Die Abhängigkeit von dem Vorhersagezeitraum ( $n$ ) fehlt. Später wird klar, dass die Wahl des Minimums als Trendindikator dienen wird. Dies wird in den folgenden Modifikationen deutlich:

Die obige Formel soll nun nur verwendet, wenn die Summe aller Kurswerte der letzten drei Monate, die kleiner als  $D_{38A}$  sind, größer ist als die Summe aller Kurswerte über  $D_{38A}$ . Andernfalls wird der Tiefstwert  $T_{3M}$  durch den Höchstwert  $H_{3M}$  ersetzt.

$$A_n = \frac{D_{38A} + H_{3M}}{2} \quad \text{Formel 2}$$

Auf diese Weise wird im Gegensatz zu Formel 1 ein positiver Trend modelliert. Der Vorhersagewert liegt in der Fassung 1 somit unter und in der Fassung 2 über dem 38-Tage-Durchschnitt.

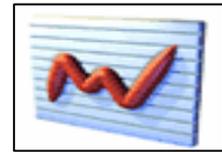
**Beispiel:**

26,01	27,34	26,52	26,93	26,32	26,72	25,65	27,13	27,13	27,16	27,03	27,03	26,21	26,47	23,59	22,75	24,17	24,74	24,58
23,72	23,97	25,25	25,5	26,67	26,37	26,83	26,11	26,42	25,09	23,26	23,77	24,02	23,59	22,75	21,93	23,01	23,51	22,95

**Abbildung 6: 38 Kurswerte der Aktie der Dt. Telekom (10.09.-03.11.1998)**

Der Mittelwert der 38 Kurswerte beträgt 25,28 €. Die Summe aller Kurswerte unterhalb des Mittelwerts von 25,28 € beträgt 403,70 € und die Summe oberhalb 531,55 €. Somit wählen die Schülerinnen und Schüler die Formel 2 (Maximum = 27,34). Betrachtet man die Anzahl aller Kurswerte unter- und überhalb des Mittelwerts, erhält man 20 unterhalb und 18 überhalb. Es wird also deutlich, dass die Variante über die Summe der Kurswerte andere Ergebnisse liefern kann, als die reine Betrachtung der Anzahl der Kurswerte unter- bzw. überhalb des Mittelwerts. Für das Beispiel ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$A_n = \frac{25,28 + 27,34}{2} = 26,31$$



Da der Index  $n$  bei der Funktionsvorschrift keine Bedeutung hat, bleibt damit offen, für wann diese Vorhersage eigentlich sein soll, obwohl sie für den Zeitpunkt in  $n$  Tagen gedacht war. Dieser Mangel wurde von den Schülerinnen und Schülern scheinbar nicht erkannt bzw. als Mangel bewertet.

Im nächsten Schritt wurde eine weitere Modifizierung bezüglich der Entscheidungskriterien für Formel 1 oder Formel 2 vorgenommen.

Anstelle der Summen der Kurswerte wurden nun die Summen der Differenzen zu dem Mittelwert  $D_{38A}$ , also die Summe der Abstände, miteinander verglichen (wiederum aufgeteilt nach Werten unter- und überhalb des Mittelwertes). Die Auswahl des Trends erfolgt analog zu der in Modifikation 2.

Das ergibt dann für die Werte aus Beispiel 1:

Summe der Beträge der Differenzen von Werten unterhalb von  $D_{38A}=25,28$   
zu diesem Mittelwert: **28,34**

Summe der Beträge der Differenzen von Werten oberhalb von  $D_{38A}=25,28$   
zu diesem Mittelwert: **26,01**

Somit wird die Formel 2 mit Minimum = 21,93 verwendet. Sie liefert folgendes Ergebnis:

$$A_n = \frac{25,28 + 21,93}{2} = 23,60$$

Damit bewirkt der Trend nach unten ein deutlich pessimistischeres Ergebnis als es im ersten Berechnungsbeispiel der Fall war.

Dieses Modell wurde nach eigenen Angaben durch verschiedene „Testreihen“ für kurzfristige Prognosen als geeignet bewertet, indem eine Plausibilitätsprüfung durchgeführt wurde.

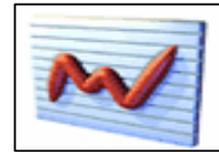
### 2.3.2.2 Modell 2: „Simulations-Modell“

Eine einzelne Schülerin entwickelte ein Modell, welches auf der Grundannahme beruht, dass sich der Kursverlauf zufällig entwickelt. Um diesen zufallsbedingten Verlauf zu beschreiben, simulierte sie die Entwicklung mit dem Computer. Hierzu bestimmte sie eine mittlere Steighöhe, die spezifisch aus den Schwankungen der letzten drei Monate durch Mittelwertbildung bestimmt wird. Der Computer entscheidet dann per Zufallsgenerator, ob der jeweilige Kurs an dem Tag  $x$  um die mittlere Steighöhe  $S$  steigt oder fällt. Daraus ergibt sich eine Formel zur Berechnung:

$$A_n = A_0 \underbrace{\pm S \pm \dots \pm S}_{n \text{ mal}} \quad \text{Formel 3}$$

$A_n$ : Aktienkurs in  $n$  Tagen;

$A_0$ : aktueller Kurs;



+/- entscheidet der Zufallsgenerator.

Auch dieser Ansatz wurde mit einigen Modifikationen versehen.

In einem ersten Schritt sollen Trends für den Wert der Steighöhe zusätzlich zum zufallsbedingtem Steigen bzw. Fallen berücksichtigt werden. Die Trends werden aus der Entwicklung der 38-Tage-Durchschnittswerte ermittelt.

Fallunterscheidung:

1. Wenn  $D_{38n} > D_{38A} + 0,5$  dann gilt  $A_n = A_0 + S \cdot (0,85a - 1,15b)$
2. Wenn  $D_{38n} < D_{38A} - 0,5$  dann gilt  $A_n = A_0 + S \cdot (1,15a - 0,85b)$
3. Wenn  $D_{38n} - 0,5 < D_{38A} < D_{38n} + 0,5$  dann gilt  $A_n = A_0 + S \cdot (a - b)$

$D_{38n}$ : 38-Tage-Durchschnitt am Tag  $n$  Tage vor dem Berechnungstag;

$D_{38A}$ : 38-Tage-Durchschnitt am Berechnungstag;

$a$ : Anzahl der Tage, an denen der Kurs steigt;

$b$ : Anzahl der Tage, an denen der Kurs sinkt.

Im ersten Fall sinkt der 38-Tage-Durchschnitt von dem Zeitpunkt  $n$  Tage vor dem Berechnungstag bis zum Berechnungstag, so dass die Faktoren so gesetzt werden, dass der Abwärtstrend stärker berücksichtigt wird (Faktor 1,15).

Im zweiten Fall steigt der 38-Tage-Durchschnitt von dem Zeitpunkt  $n$  Tage vor dem Berechnungstag bis zum Berechnungstag, so dass die Faktoren so gesetzt werden, dass der Aufwärtstrend stärker berücksichtigt wird (Faktor 1,15).

Im dritten Fall wird die unterschiedliche Faktorisierung aufgehoben, wenn die Veränderung des 38-Tage-Durchschnitts nur sehr gering ausfällt (hier absolute Änderung von weniger als 50 Cent).

Die Faktoren 0,85 und 1,15 sind durch Ausprobieren und einer damit verbundenen Prüfung auf Plausibilität der Ergebnisse für zweckmäßig gehalten worden.

Die zweite Modifikation sieht vor, dass die Toleranzgrenze für die Faktorisierung der Schrittweite nicht absolut, sondern relativ zum Kurswert berechnet wird. Die Toleranzgrenze beträgt hier 2% des 38-Tage-Durchschnitts.

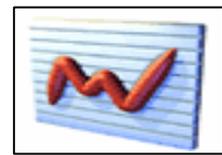
1. Wenn  $0,98 D_{38n} > D_{38A}$  dann gilt  $A_n = A_0 + S \cdot (0,85a - 1,15b)$
2. Wenn  $1,12 D_{38n} < D_{38A}$  dann gilt  $A_n = A_0 + S \cdot (1,15a - 0,85b)$
3. Wenn  $0,98 D_{38n} < D_{38A} < 1,12 D_{38n}$  dann gilt  $A_n = A_0 + S \cdot (a - b)$

$D_{38n}$ : 38-Tage-Durchschnitt am Tag  $n$  Tage vor dem Berechnungstag;

$D_{38A}$ : 38-Tage-Durchschnitt am Berechnungstag;

$a$ : Anzahl der Tage, an denen der Kurs steigt;

$b$ : Anzahl der Tage, an denen der Kurs sinkt.



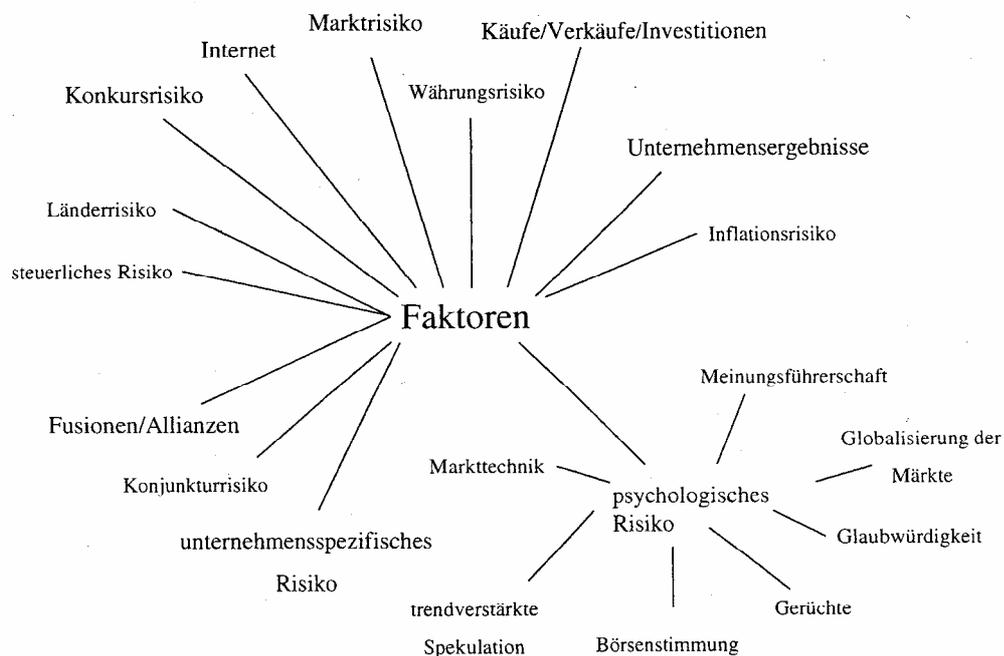
Eine letzte Modifikation wurde ausschließlich theoretisch angedacht, da die Zeit nicht mehr für die Realisierung reichte. Dabei sollten die Faktoren 0,85 und 1,15 für die Trendberücksichtigung nicht fix, sondern in Abhängigkeit vom Kurswert modelliert werden.

### 2.3.3. Gruppe Gymnasium Grootmoor

18 Schüler (ausschließlich männlich!)

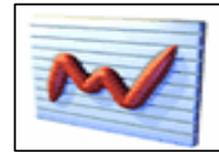
Auch in der Gruppe am Gymnasium Grootmoor bestand die erste Problematik darin, Fragestellungen aufzustellen, die in den vorgegebenen Rahmen passten. Dabei wurden zunächst folgende Fragen entwickelt und in drei Gruppen daran weiter gearbeitet:

- Wie genau lassen sich Kurswerte vorhersagen?
- Welche Einflüsse wirken in welchem Ausmaß auf Währungen?
- Was bedeutet Risiko bei Aktien?



**Abbildung 7: Darstellung der Risikofaktoren**

Ein erstes Ergebnis aller Gruppen war eine Analyse der Risikofaktoren, um einen Überblick darüber zu gewinnen, welche Faktoren eigentlich auf den Kurs einer Aktie bzw. allgemeiner auf einen gehandelten Wert wirken. Auf der Basis einer Bankbroschüre über den Wertpapierhandel hatten die Schüler obige Übersicht



erstellt und die einzelnen Faktoren zusätzlich näher beschrieben, was an dieser Stelle jedoch aus Platzgründen nicht wiedergegeben werden soll.

Für die Schüler war klar, dass es unmöglich sein würde, ein mathematisches Modell zu entwickeln, welches alle angeführten Faktoren berücksichtigen und quantifizieren kann. Daher mussten Modellierungsannahmen getroffen werden.

### 2.3.3.1 Gruppe 1: Der Risiko-Wert

Die Gruppe 1 wollte sich nunmehr mit der Suche nach einem konkreten Maß für das Risiko beschäftigen. Sie hatte auch recht schnell eine grobe Vorstellung davon, wie man dieses Maß aus dem vergangenen Kursverlauf bestimmen könnte. Das Kursrisiko wurde dabei aus dem Schwankungsverhalten des Kursverlaufs ermittelt. Die erste Definition lautete:

Risiko ist der Betrag der maximal zu erwartenden Auslenkung des Kursverlaufs.

Dabei meinen die Schüler jedoch nicht die absoluten Kurswerte, sondern die relativen Wertveränderungen von einem Tag zum anderen:

$$\Delta_i = \frac{\text{Wert}_{i+1} - \text{Wert}_i}{\text{Wert}_i}$$

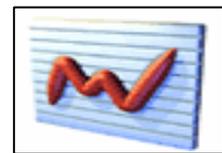
Die Modellierung durch das Maximum dieser Werte wurde jedoch schnell von den Schülern verworfen, da das Risiko so auf relativ lange Zeit festgelegt sein könnte. Es fehlte also eine veränderliche Größe.

Dies führte zur Betrachtung eines bestimmten Zeitraums und zusätzlich zu einer Mittelwertbildung und somit zu einer erweiterten Definition:

Das Risiko ist der Durchschnitt der Beträge der innertäglichen Kursentwicklung innerhalb eines bestimmten Zeitraums. Diesen Wert möchten wir als relative Schwankungsbreite, kurz R-Wert, bezeichnen.

Diese Definition wollten die Schüler sofort an realistischen Daten ausprobieren. Dabei stellte sich die Beschaffung von Daten in Form von Zahlenmaterial der Kursverläufe als schwierig heraus. Chart-Verläufe erhält man im Internet zu Genüge. Tabellarische Aufzeichnungen stehen im Prinzip nicht zur Verfügung. Nach längerer Recherche konnte der Kurs für einige wenige Werte das Datenmaterial für einen zurückliegenden Zeitraum von zwei Jahren von einer Sparkasse besorgen. Mit Hilfe dieser Daten wurden nun Berechnungen angestellt.

Die Schüler stellten die Hypothese auf, dass der R-Wert um so besser sei, je mehr Daten vergangener Kursänderungen zu seiner Bestimmung einfließen würden. Die Mittelwertbildung sahen sie dabei nicht als Problem. Erst später konnten sie von den Studierenden überzeugt werden, dass kurzfristige, gravierende Ereignisse, vergleichbar dem schwarzen Freitag von 1929, den



Risikowert aktuell wesentlich stärker beeinflussen würden als die Kursveränderung vor langer Zeit.

**Beispiel: Bestimmung des R-Wertes der Aktie Deutsche Telekom AG**

Aus der Datentabelle (Auszug siehe Abbildung 8) werden die relativen Tagesdifferenzen wie oben beschrieben gebildet. Mit heutiger Technik (hier Excel) ist es kein Problem, die Betragsfunktion anzuwenden, so dass das Quadrieren, wie es bei der Bestimmung der Standardabweichung der Fall ist,

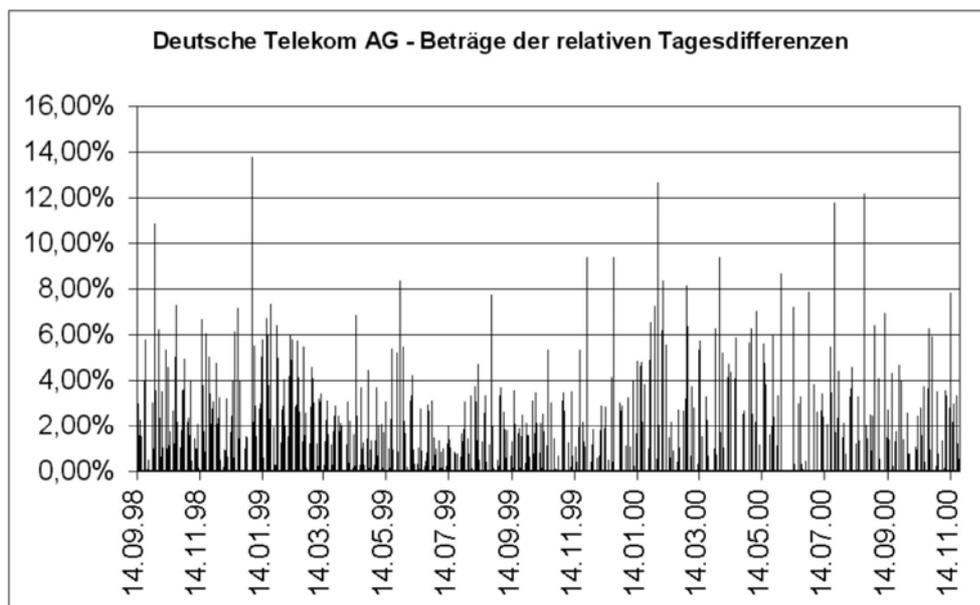
Datum	Kurswert in €	relative Tagesdifferenz	deren Betrag
10.11.00	39,09		
13.11.00	38,00	-2,79%	2,79%
14.11.00	40,98	7,84%	7,84%
15.11.00	41,15	0,41%	0,41%
16.11.00	40,25	-2,19%	2,19%
17.11.00	39,05	-2,98%	2,98%
20.11.00	37,75	-3,33%	3,33%
21.11.00	38,20	1,19%	1,19%
22.11.00	38,00	-0,52%	0,52%
23.11.00	38,99	2,61%	2,61%

nicht notwendig war. Jetzt wurden alle Beträge aufsummiert und durch die Anzahl der Werte (N) dividiert. Im Beispiel wurde der R-Wert für N=200 Tage berechnet.

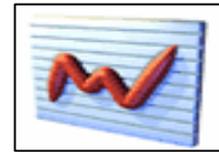
Daraus ergibt sich ein erster R-Wert. Der R-Wert der Deutschen Telekom AG aus dem

**Abbildung 8: Auszug aus der Datentabelle mit Berechnungen**

Zeitraum 19.1.-23.11.00 beträgt 2,92%. Dieser Wert muss selbstverständlich mit anderen Werten verglichen werden, damit man beurteilen kann, welches Ausmaß durch ein Risiko der Höhe 2,92% repräsentiert wird.



**Abbildung 9: Beträge der relativen Tagesdifferenzen vom 14.9.98-23.11.00**



Nach der oben bereits erwähnten Anregung durch die Studierenden begannen die Schüler damit, ihre Modellierungsannahmen zu verfeinern und bezüglich einiger Dimensionen zu konkretisieren.

Der erste Schritt war die Anpassung der Gewichtung der Kursveränderungen bezüglich ihres zeitlichen Abstands zu der Gegenwart. Ziel sollte sein, kurzfristige Ereignisse stärker als die lang zurückliegenden Werte zu berücksichtigen. Hierfür wurde das gewichtete Mittel herangezogen:

$$\bar{X}_g = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$$

$g_i$ : Gewichtungsfaktoren

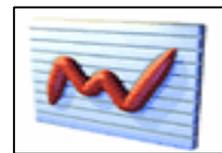
$x_i$ : Werte, die in die Mittelwertbildung eingehen

Nun stellte sich die Frage, wie die Gewichtungsfaktoren gewonnen werden konnten. Es wurde den Schülern sehr schnell klar, dass erst einmal eine gewisse Willkür vorlag, die dann bestimmter Annahmen bedurften. Sie überlegten sich folgende Bedingungen an die Faktoren:

- 1.) Sie sollten durch eine Funktion ausgedrückt werden, die von dem Abstand der jeweiligen Tagesdifferenz zur Gegenwart abhängen sollte.
- 2.) Die Abhängigkeit vom Prognosezeitraum sollte dafür stehen, wie lang man gedenkt, in dieses Wertpapier zu investieren. Dabei wurde folgende Regel aufgestellt: Je kürzer die zu treffende Prognose ist, desto wichtiger müssen die Werte aus der nahen Vergangenheit einfließen, da die jüngsten Entwicklungen, die sich in den neuesten Kursdaten widerspiegeln, auch in ähnlicher Stärke in der nahen Zukunft vorherrschen werden. Für sehr große Prognosezeiträume sollte der Faktor gegen eins streben, damit aus dem gewichteten Mittel wieder das arithmetische wird.
- 3.) Die Abhängigkeit von den vorhandenen oder benutzten Daten sollte derartig sein, dass der Faktor linear mit der Anzahl der benutzten Daten sinkt. Falls wenig Daten vorhanden sein sollten, sollten diese lieber gleichgewichtet eingehen.

Da die Schüler Probleme hatten, die e-Funktion bei Excel zu finden, hatten sie sich für eine Exponentialfunktion zur Basis 2 entschieden.

$$F(i) = 2^{\frac{i \cdot \text{Anzahl der Daten}}{\text{Prognosezeitraum}^2}}$$



Aus den Überlegungen zu 2. und 3. hatten die Schüler geschlussfolgert, dass die Anzahl der Daten im Zähler und der Prognosezeitraum im Nenner stehen müssen. Das Quadrat rührte daher, dass die Abhängigkeit vom Prognosezeitraum wichtiger erscheint als die Anzahl der Daten. Die Variable  $i$  steht für die Nummer des Tages, wenn man diese chronologisch durchnummeriert.

**Beispiel:**

Für die T-Aktie ergibt sich folgende Berechnung mit den Daten bis zum 23.11.00:

Anzahl der Daten: 546

Prognosezeitraum: 400 Tage

Wie man in Abbildung 10 sieht, liegen der einfache R-Wert und der gewichtete R-Wert nah beieinander. Dies könnte daran liegen, dass bei der Aktie der Dt. Telekom kein Trend festzustellen ist.

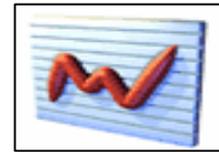
Auch für die Aktie der Deutschen Bank wurden die beiden Werte für einen Prognosezeitraum von 400 Tagen ermittelt. Diese lagen bei 1,54% und gewichtet bei 1,66%. Demnach wären Investitionen in die Deutsche Telekom riskanter als Investitionen in die Deutsche Bank. Als Vergleich haben die Schüler noch das Sparbuch angebracht, bei dem es zwar kein Verlustrisiko, aber eine sehr sichere Gewinnchance von 1,25% gäbe.

Datum	Kurs €	relative Differenz	Betrag	lfd. Nr. i	Gewichtung	gewichtete Auslenkung
10.09.98	26,01					
14.09.98	27,34	5,11%	5,11%	0	1,0000000000	5,11%
15.09.98	26,52	-3,00%	3,00%	1	1,0023594796	3,01%
16.09.98	26,93	1,55%	1,55%	2	1,0047245264	1,55%
17.09.98	26,32	-2,27%	2,27%	3	1,0070951534	2,28%
18.09.98	26,72	1,52%	1,52%	4	1,0094713739	1,53%
21.09.98	25,65	-4,00%	4,00%	5	1,0118532010	4,05%
22.09.98	27,13	5,77%	5,77%	6	1,0142406480	5,85%
23.09.98	27,13	0,00%	0,00%	7	1,0166337282	0,00%
15.11.00	41,15	0,41%	0,41%	537	3,5450353165	1,45%
16.11.00	40,25	-2,19%	2,19%	538	3,5533997550	7,77%
17.11.00	39,05	-2,98%	2,98%	539	3,5617839293	10,62%
20.11.00	37,75	-3,33%	3,33%	540	3,5701878859	11,89%
21.11.00	38,2	1,19%	1,19%	541	3,5786116714	4,27%
22.11.00	38	-0,52%	0,52%	542	3,5870553327	1,88%
23.11.00	38,99	2,61%	2,61%	543	3,5955189167	9,37%
					1103,6342308	2781,23%
<b>Arithmetisches Mittel</b>			<b>2,49%</b>		<b>gewichtetes Mittel</b>	<b>2,53%</b>

Abbildung 10: Auszug aus der Tabelle zur Berechnung des gewichteten R-Wertes

2.3.3.2 Gruppe 2: Kursvorhersage

Die Schüler dieser Gruppe hatten entschieden, dass das gesuchte Modell zur Prognose eines Kurswertes aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung



stammen müsste. Da die Schüler allerdings kaum stochastische Vorkenntnisse besaßen, entstand eine Leere. Auch die Schüler bemängelten, dass sie mit ihrem zur Verfügung stehenden Werkzeug die Problematik nicht in den Griff bekommen konnten. Nach längerer Diskussion unter den Studierenden und dem beteiligten Lehrer wurde entschieden, eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung am Beispiel der Binomialverteilung vorzunehmen. Diese Einheit, die ausschließlich für die Gruppe 2 stattfand, stellte allerdings einen nicht zu unterschätzenden Impuls dar. Die Anwendung der Binomialverteilung auf das Modellierungsproblem geschah somit durch die Auswahl der Studierenden und nicht durch die Schüler. Damit ist der aktive, selbstständige Modellierungscharakter stark eingeschränkt worden. Die Modellierungstätigkeiten der Schüler wurden allerdings zu einem späteren Zeitpunkt wieder aufgenommen, da bei der Anwendung der Binomialverteilung weitere Modellierungsschritte vorzunehmen waren.

Dennoch geschah diese Intervention, da die offensichtliche Schwachstelle an diesem Modellierungsthema sonst nicht zu überbrücken gewesen wäre.

Die Modellierung mit der Binomialverteilung verlief im Prinzip, wie es in Abschnitt 2.3.4 beschrieben wird.

Zur Berechnung der Elementarwahrscheinlichkeit  $p$  zählten die Schüler zunächst aus, wie häufig eine positive bzw. negative Veränderung des Kurses aufgetreten war und setzten dies ins Verhältnis zu der Anzahl der betrachteten Tage.

Auch hier wurde vorerst keine Gewichtung vorgenommen, so dass länger zurückliegende Kursveränderungen einen ebenso starken Einfluss auf die Kursentwicklung in der nahen Zukunft hatten wie die der letzten Tage.

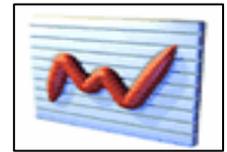
Diese Schwierigkeit wurde später mit Hilfe des von der anderen Teilgruppe entwickelten Gewichtungsfaktors bei der Berechnung des R-Werts behoben.

Nun bestand die konkrete Aufgabenstellung darin, zu einem vorgegebenen Sicherheitsniveau  $\alpha$ , beispielsweise  $\alpha = 80\%$ , ein Intervall zu finden, welches den Kurs  $n$  Börsentage später mit der festgelegten Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  enthalten soll. Es handelt sich also um eine Intervallschätzung. Es liegt nahe, ein um den Erwartungswert zentriertes Intervall zu bestimmen, da nahe des Erwartungswertes die größten Z-Dichten auftreten; folglich gelingt es auf diese Weise, ein Intervall mit minimaler Länge zu bestimmen.

#### **Beispiel:**

Es soll eine Kursvorhersage über einen Zeitraum von  $n = 10$  Tagen erstellt werden,  $p$  sei 0,6. Es wird ein Sicherheitsniveau  $\alpha = 75\%$  vorgegeben.

Der Erwartungswert beträgt sechs ( $E = n * p = 10 * 0,6 = 6$ ); d.h. nach dem Erwartungswert wird der Kurs an sechs von zehn Börsentagen steigen.



$$B(10; 0,6; 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,66 \cdot 0,44 \approx 0,251$$

$$B(10; 0,6; 7) = \binom{10}{7} \cdot 0,67 \cdot 0,43 \approx 0,215$$

$$B(10; 0,6; 5) = \binom{10}{5} \cdot 0,65 \cdot 0,45 \approx 0,201$$

$$B(10; 0,6; 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,68 \cdot 0,42 \approx 0,121$$

$$\sum_{k=5}^8 B(10; 0,6; k) \approx 0,251 + 0,215 + 0,201 + 0,121 = 0,788 > 0,75.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% steigt also der Börsenkurs an 5, 6, 7 oder 8 von 10 Tagen und fällt entsprechend an 5, 4, 3 bzw. 2 Tagen.

Bei größeren Werten für  $n$  ist das beschriebene Rechenverfahren sehr aufwendig. Dieses Problem wurde durch die Programmierung des Algorithmus' in Excel gelöst.

Nun kann zu einem gegebenen Sicherheitsniveau  $\alpha$  ein Intervall von Kurswerten berechnet werden, welches den tatsächlichen Kurswert in  $n$  Börsentagen mit der Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  einschließt. Mit dem R-Wert der anderen Gruppe kann man nun auch etwas über den Kurswert und nicht nur etwas über die Anzahl des Steigens und Sinkens sagen.

Wir kennen zu dem gegebenen Sicherheitsniveau  $\alpha$  eine Bandbreite von Tagen mit positiver Kursveränderung (in obigem Beispiel 5, 6, 7 oder 8 Börsentage) und dementsprechend auch mit negativer Veränderung.

Im Beispiel gilt:  $k_{\min} = 5$ ;  $k_{\max} = 8$ .

Das zu  $\alpha$  gehörige Konfidenzintervall wird wie folgt berechnet:

Für die untere Intervallgrenze gilt:

$$X(t_n)_{\min} = X(t_0) \cdot (1+R)^{k_{\min}} \cdot (1-R)^{n-k_{\min}}$$

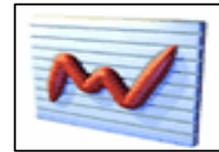
Entsprechend gilt für die obere Intervallgrenze:

$$X(t_n)_{\max} = X(t_0) \cdot (1+R)^{k_{\max}} \cdot (1-R)^{n-k_{\max}}$$

Im Beispiel gilt für den R-Wert  $R = 0,03$  und den Ausgangskurs von  $X(t_0) = 100$ :

$$X(t_n)_{\min} = X(t_0) \cdot (1+R)^{k_{\min}} \cdot (1-R)^{n-k_{\min}} = 100 \cdot 1,03^5 \cdot 0,97^5 \approx 99,55$$

$$X(t_n)_{\max} = X(t_0) \cdot (1+R)^{k_{\max}} \cdot (1-R)^{n-k_{\max}} = 100 \cdot 1,03^8 \cdot 0,97^2 \approx 119,19$$



Der Kurs dieser Aktie wird (unter Berücksichtigung der Modellannahmen) zehn Börsentage später mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% zwischen 99,55 € und 119,19 € liegen.

Diskussion der Modellannahmen:

Bei der Berechnung des Konfidenzintervalls wurde davon ausgegangen, dass sich der Kurs täglich um denselben Prozentsatz des Kurswertes verändert (im Beispiel um 3 %). Kurzfristig betrachtet kann diese Modellannahme das Ergebnis jedoch deutlich verfälschen, da sich die Veränderung des Kurses in der Realität nicht an die berechnete relative Veränderung halten muss. Somit wird das Konfidenzintervall zum Niveau von 100% z.B. nicht zwangsläufig den wahren Wert enthalten. Langfristig mitteln sich die verschiedenen Effekte allerdings heraus. Mittelfristig (beispielsweise bei Prognosezeiträumen größer 10) kann erwartet werden, dass R eine gute Näherung ist. Dennoch muss man bei der Ergebnisübertragung vom mathematischen Modell auf das Realmodell bzw. auf die reale Situation wie bei jeder mathematischen Modellierung Vorsicht walten lassen. Das ist auch den Lernenden klar geworden.

#### 2.3.4. Weiterführende Ideen der Studierenden

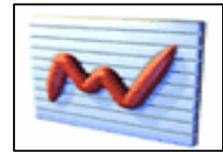
Basierend auf dem Modell der „Irrfahrt“ haben die Studierenden des Gymnasiums Tonndorf einen stochastischen Prozess modelliert, der von einem Startwert  $K_0$  über Übergangswahrscheinlichkeiten, die ausschließlich von dem Kurswert vom vorherigen Tag abhängen (Markov-Eigenschaft), ausgeht. Das Gesamtexperiment, also die Vorhersage des Kurswertes in  $n$  Tagen, kann durch ein diskretes W-Maß  $P_n$  mit einer Produktwahrscheinlichkeitszähldichte aufgefasst werden. Da der Kurs in jedem Telexperiment nur fallen oder steigen kann, hat das Zufallsexperiment in jeder Stufe nur zwei verschiedene Ausgänge, und kann als Bernoulli-Experiment beschrieben werden. Die Anzahl der Tage, an denen der Kurs steigt, ergibt sich somit aus der Faltung der Bernoulli-Verteilung, und ergibt dann eine Binomialverteilung.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs an  $k$  von  $n$  Tagen steigt, ergibt sich also aus der Zähldichte:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Analog ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs an  $i$  von  $n$  Tagen sinkt:

$$P(i) = \binom{n}{i} (1-p)^i \cdot p^{n-i}$$



Für den Erwartungswert für den Kurs wird nun der Erwartungswert für die Anzahl der steigenden Kurse verwendet. Daraus ergibt sich natürlich auch die zu erwartende Anzahl von sinkenden Kursen. Aus der Multiplikation mit einer mittleren Steighöhe  $S$  ergibt sich dann ein Schätzwert für den Kurswert:

$$EK_n = K_0 + n \cdot S \cdot (2p - 1)$$

Die mittlere Steighöhe  $S$  wird dabei durch die auf den halben Veränderungszeitraum relativierte Schwankungsbreite in einem bestimmten Zeitraum ( $j$  Tage) bestimmt:

$$S := \frac{K_{\max} - K_{\min}}{\frac{j}{2}}$$

**$K_{\max}$ : maximaler Kurswert in dem Zeitraum;**

**$K_{\min}$ : minimaler Kurswert in dem Zeitraum;**

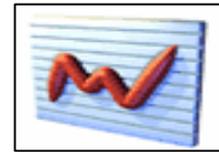
**$j$ : Anzahl der Tage in dem Zeitraum.**

Die Bestimmung der Elementarwahrscheinlichkeit  $p$  wurde dabei aus verschiedenen kleineren Faktoren vorgenommen, auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll. Der Wert wurde jedoch in der Größenordnung von 0,5 angesiedelt und wich auf Grund von fünf Faktoren in Bruchteilen davon ab.

#### 2.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt

An beiden Gymnasien wurde das Projekt im Rahmen des Unterrichts durchgeführt, indem zwei der fünf Stunden des Leistungskursunterrichts der Projektarbeit gewidmet wurden.

Wiederum war in beiden Gruppen auffällig, dass eine Menge an Grundlagen erarbeitet werden musste, damit sich überhaupt eine Fragestellung ergeben konnte und die nötigen Kenntnisse für das Aufstellen eines Realmodells vorhanden waren. Diese Arbeit war im Rahmen des Mathematikunterrichts neu, und einige Schülerinnen und Schüler mussten sich erst an diese Arbeitsweise gewöhnen. Anfänglich wurde dies zudem nicht mit mathematischen Tätigkeiten in Bezug gesetzt, so dass Äußerungen wie „Fällt Mathe heute wieder aus?“ auftraten. Dieser Eindruck kann aber im Nachhinein revidiert werden, da die Lernenden rückblickend im Prinzip erkannt haben, dass diese Erarbeitungsphase für jede Modellierung – zwar in unterschiedlicher Intensität – notwendig sein würde und damit zu dem Gesamtprozess dazu gehört.



Die meisten Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren mit Freude und viel Energie an dem Projekt beteiligt. Anfängliche Überforderungen mit der Offenheit der Fragestellung wurden mittelfristig genutzt, um mit viel Kreativität an dem spannenden Thema zu arbeiten. Die Probleme mit den stochastischen Elementen in den möglichen Modellierungslösungen wurden auch von den Schülerinnen und Schülern selbst bemängelt, da sie das Dilemma sahen, dass ihnen die notwendigen Werkzeuge im Prinzip fehlten.

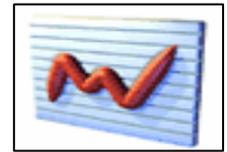
Das Thema an sich war zu diesem Zeitpunkt höchst motivierend. Die Börse boomte und fast alle Bereiche der Gesellschaft interessierten sich für Erträge, Shareholder Values und Portfolios. So waren die Schülerinnen und Schüler sehr interessiert und sahen einen hochgradigen praktischen Nutzen an dem, was sie taten.

Alles in allem wurde das Projekt sehr positiv aufgenommen. Das weniger lehrergesteuerte Arbeiten wurde genossen, zum Teil aber auch ausgenutzt, indem selbstbestimmte Auszeiten genommen wurden. Alle kann man eben nie gleichzeitig erreichen.

## 2.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses

Wie schon in den vorherigen Abschnitten deutlich geworden sein wird, war der Einstieg in den Modellierungsprozess recht problematisch, da das Realproblem nicht konkret gegeben war. Es ist für weitere Projekte absolut erforderlich, dass dies gewährleistet ist. In einigen Fällen wäre es vielleicht sogar sinnvoller, wenn bereits ein Realmodell mit Vereinfachungen und Idealisierungen angeboten würde, damit es den Schülerinnen und Schülern einfacher gemacht wird, in das Thema und den Modellierungskreislauf einzusteigen. Dies sollte vom Problem abhängig gemacht werden. Bei einigen Problemen – wie z.B. bei dem hier umrissenen – ist der Problemkreis so komplex, dass die Realsituation für derartige Projekte zu kompliziert ist.

Ein weiteres Problem besteht bei diesem Modellierungsbeispiel in dem Bereich der zur Verfügung stehenden mathematischen Werkzeuge. Da die Stochastik trotz des spiralcurricularen Auftretens im Lehrplan der Sekundarstufe I überwiegend erst am Ende der Sekundarstufe II intensiv behandelt wird, sind die Kenntnisse und Fähigkeiten in diesem mathematischen Teilbereich am Anfang der Oberstufe häufig zu gering, als dass man mit den Schülerinnen und Schülern eine derartig schwierige Modellierung durchführen könnte. Dies war in beiden Modellierungsgruppen deutlich bemerkbar. Bei der Gruppe Tonndorf ging es somit primär um deterministische Modelle oder aber um eine Simulation. Hier hat sich die Gruppe der Studierenden bewusst zurückgehalten, so dass das Ergebnis



mehr den wirklichen Leistungen der Schülerinnen und Schüler entspricht. Bei der Gruppe Grootmoor wirkten die Studierende wesentlich auf die Modellbildung der Schüler ein, indem sie eine Einführung in die Binomialverteilung gegeben hatten. Damit wurde der entscheidende Schritt in der einen Teilgruppe von den Lehrenden gesteuert. Dies ist bezüglich der Intentionen des Projekts zwar weniger schön, war aber unter Abwägung der Vor- und Nachteile eine mögliche Lösung, dieses Projekt sinnvoll zu beenden.

Aus didaktischer Sicht ist also festzuhalten, dass sichere mathematische Grundlagen in den betroffenen Bereichen vorhanden sein müssen, damit sich die Schülerinnen und Schüler eigenständig mit einem Thema beschäftigen können. Außerdem sollte gewährleistet sein, dass überhaupt adäquate Lösungen mit den in der Schule vorhandenen Mitteln gefunden werden können. Ansonsten macht sich unter Umständen Frustration breit und wirkt dann dem ansonsten vorhandenen Interesse an der Modellierung entgegen. Darüber hinaus lebt die Modellierung von Problemen mit einer Lösungsvielfalt, die dann mit grundlegenden Überlegungen und unter Rückbezug auf die Realsituation eingeschränkt werden kann. Dieser Schwerpunkt kann nicht erlebt werden, wenn nicht verschiedenen Ideen zur Modellierung entstehen, weil nur eine Lösung, wie beim Gymnasium Grootmoor die Binomialverteilung, zur Verfügung steht.



### 3. Mathematik der privaten Krankenversicherung

#### 3.1. Zusammenfassung

In diesem Modell geht es um die Gestaltung von Beiträgen für eine private Krankenversicherung. Als Konkretisierung dieser Aufgabe sollten die Tarife für eine private Krankenvorsorge für Männer und Frauen von 21 bis 100 Jahren festgelegt werden, in der die ambulante, stationäre und zahnärztliche Versorgung abgedeckt sind.

Zur Bearbeitung dieser Fragestellung haben sich die Schülerinnen und Schüler zuerst wiederum mit den Sachinhalten vertraut gemacht, also der Gestaltung und Beeinflussung von Krankenkassenbeiträgen. Weiterhin wurden die Funktionsweise einer Krankenversicherung und Begriffe wie der Kopfschaden erarbeitet.

Eine Gruppe hat daraufhin anhand elementarer Mathematik eine Formel zur Beitragsgestaltung ermittelt, in die wesentlich die obigen Kenntnisse eingehen. Außerdem wurde auch hier versucht, Modellansätze anhand von realem Datenmaterial realistisch zu gestalten. Im weiteren Verlauf wurde die Schwierigkeit der Gleichungen erhöht, indem Aspekte wie Sterbefälle und Krankenkassenaustritte berücksichtigt wurden.

Durch die Berücksichtigung von Sterbefällen und Krankenaustritten können auch in dieses Modell Elemente der Stochastik einfließen, so haben die Schülerinnen und Schüler die Frage, ob eine Person stirbt oder aus der Krankenkasse austritt, als zweistufiges Zufalls – Experiment modelliert. Auch Fragen nach der Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Lebensalter zu erreichen, können in dieses Modell eingehen. Zur konkreten Berechnung von Beitragssätzen, die sich aus komplizierteren Formeln ergeben, bietet sich auch hier zur Vereinfachung der Arbeit der Computer an.

#### 3.2. Problemdarstellung

Das Problem, mit dem sich die Schülerinnen und Schüler des Emile-Wüstenfeld-Gymnasiums, des Gymnasiums Ohmoor und des Gymnasiums Heidberg beschäftigt haben, lässt sich auf folgende Frage reduzieren: Wie kann man Beiträge für eine private Krankenversicherung berechnen?

Folgende Aufgabe war durch die Präsentation von Frau Köhler vorgegeben:

"Ein Versicherungsunternehmen plant zur Erweiterung seiner Produktpalette die Einführung einer privaten Krankenversicherung. Diese soll zunächst nur aus den drei Tarifen A, S und Z bestehen, die die Kosten für ambulante Behandlung (A), stationäre Behandlung in der allgemeinen Pflegekasse (S) und



zahnärztliche Behandlung (Z) übernimmt. Sie sind Mitarbeiter der mathematischen Abteilung des Unternehmens und werden von der Geschäftsleitung beauftragt, die Beiträge der obigen Tarife jeweils für Männer und Frauen ab 21 Jahren und Endalter 100 zu kalkulieren."

Folgende Kernfragen lassen sich daraus ableiten:

- a) Welche Komponenten/Aspekte spielen bei der Beitragsberechnung zur privaten Krankenversicherung eine Rolle?
- b) Wie sind diese Komponenten in einem mathematischen Modell zusammenzufassen?

Problematisch für die Berechnung ist hier vor allem die Bereitstellung, aber auch die Interpretation der benötigten Daten.

### 3.3. Problemlösungen

#### 3.3.1. Ansätze der Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums Emilie Wüstenfeld konzentrierten sich zunächst auf die Voraussetzungen, die sie zu beachten haben würden, und versuchten das Problem zu konkretisieren.

Zuerst wurde festgestellt, dass die privaten Krankenversicherer nach dem Kapitaldeckungsverfahren arbeiten. Die Schülerinnen und Schüler stellten dann folgende, für sie besonders wichtige Teilaspekte bei der Berechnung eines Beitragssatzes heraus:

- Höhe des Einkommens
- Gesundheitszustand (Anzugeben seien: Erbkrankheiten, chronische Krankheiten, Krankheiten in der Vergangenheit)
- Alter (Anhand der Kopfschädenstatistik<sup>8</sup> wurde erkannt, dass die Ausgaben der Versicherungen mit zunehmendem Alter der Versicherungsnehmer steigt.)
- Geschlecht (Die Ausgaben für Frauen seien höher, lediglich im Alter glichen sich die Ausgaben an.)
- Berufsrisiko

Im Folgenden schätzten die Schülerinnen und Schüler die Kopfschäden und versuchten dann – nach dem Vergleich mit den tatsächlichen Werten – eine Formel zur Berechnung der Versicherungsbeitrages:

---

<sup>8</sup> Bei den Kopfschäden werden alle Krankheitskosten einer Altersgruppe zusammengerechnet und dann durch die Anzahl der erfassten Personen geteilt.



$$\frac{(\text{Alle Werte der Tabelle aus den Kopfschäden-Statistiken (m/w)}) \cdot \text{Grundkopfschaden}}{(12 \text{ Monate}) \cdot (\text{Anzahl der Werte, die in die Berechnungen eingingen})} = \text{Monatlicher Beitragssatz}$$

Die bereits durch die Schülerinnen und Schüler formulierte Erkenntnis, dass die Beiträge abhängig vom Eintrittsalter sind, fand in dieser Formel keine Berücksichtigung.

Letztlich beschäftigten sich die Schülerinnen und Schüler noch mit der Frage, wie sich Versicherungen versichern.

Am Gymnasium Heidberg haben die betreuenden Studierenden vorab die Aufgabe reduziert, um nicht zu enge Vorgaben zu geben und es den Schülerinnen und Schülern zu ermöglichen, die Modellierungsprozess im vollen Umfang zu durchlaufen.

So begannen die Schülerinnen und Schüler auch damit, sich der Fragestellung zu nähern, indem sie explizite Annahmen trafen, bzw. damit, sich die bereits getroffenen Annahmen plausibel zu machen. Sie legten fest, dass es reicht die Tarife bis zum 100sten Lebensjahr zu berechnen, da ältere Versicherte die absolute Ausnahme darstellen. Sie erörterten den Unterschied zwischen privaten und gesetzlichen Krankenversicherungen, um sich so deutlich zu machen, warum sich die Aufgabe nur auf die privaten Versicherungen bezog. Außerdem wurde versucht zu klären, warum bei der privaten Krankenversicherung grundsätzlich verschiedene Tarife berechnet werden. Diese Frage konnte vorerst nicht beantwortet werden.

Im Folgenden trugen die Schülerinnen und Schüler Möglichkeiten zusammen, den Beitrag zu berechnen. Sie waren der Meinung, es könne konstante, steigende und sinkende Beiträge geben. Sie einigten sich darauf, vorerst von einem konstanten Beitrag auszugehen. Außerdem nahmen sie sich vor, zuerst nur den Tarif für eine Versicherung der ambulanten Behandlungen von männlichen Personen exemplarisch zu berechnen.

Der nächste Schritt bestand darin, Überlegungen anzustellen wie hoch die für die Krankenversicherung anfallenden Kosten sein könnten. Folgende Kostenfaktoren wurden gefunden:

- Krankheitskosten (Sie sind abhängig vom gewählten Tarif.)
- Verwaltungskosten (Soll auf alle Versicherten gleich verteilt werden.)
- Gewinnerwartung der Aktionäre (Diese sollen auf alle Versicherten gleichmäßig verteilt werden.)
- Rücklagenbildung (Diese muss ebenfalls gleichmäßig auf alle Versicherten verteilt werden.)



Nun sahen die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, weitere Informationen zu bekommen, was in Form einer Statistik über die durchschnittlichen Krankheitskosten pro Jahr geschah.

Nun wurden die ersten Berechnungen angestellt. Es sollten die Kopfschäden aller Altersgruppen aufsummiert werden und dann durch die Anzahl der Versicherungsjahre geteilt werden. So wollten die Schülerinnen und Schüler den gesuchten Mittelwert berechnen. Hier tauchte der Einwand auf, dass die durchschnittliche Lebenserwartung unter 100 Jahren läge. Die Gruppe wollte den anfallenden Gewinn ausschütten oder über eine Tarifsenkung an die Versicherten weitergeben.

Nebenbei wurde geklärt, was Selbstbehalt bedeutet und dass diese Kosten, die der Versicherte selbst übernehmen muss, so gering sind, dass sie entweder bereits in den Kopfschäden enthalten sind oder aber vernachlässigt werden können.

Nun wurde folgende erste Formel aufgestellt:

$$\sum_{i=21}^{100} P_i \cdot K_s = B \cdot 80 \text{Jahre}$$

mit  $P_i$  := Profil,  $B$  := Jahresbeitrag,  $K_s$  := Kopfschaden.

Da bei dieser Formel davon ausgegangen wird, dass ein Versicherter ein Lebensalter von 100 Jahren erreicht, sollte nun berücksichtigt werden, dass Versicherte auch sterben. Anfänglich wurde dabei von 1000 Versicherten ausgegangen, da die Gruppe niemanden anteilig „sterben lassen wollte“. Es folgte die Formel:

$$W(x) = K_s(x) 1000 - S(x) \quad K_s(x) = K_s(x) (1000 - S(x))$$

$X$  := Alter,  $K_s$  := Kopfschäden,  $S$  := Sterbende,  $W$  := verursachte Kopfschäden pro 1000

Nun suchten die Schülerinnen und Schüler eine Formel, mit der man, ausgehend von einer Anfangsversichertenzahl, die Überlebenden zu jedem beliebigen späteren Zeitpunkt bestimmen kann.

Bisher hatte die Gruppe nur die Möglichkeit, aus der Zahl der Versicherten am Jahresanfang die Zahl der am Jahresende noch lebenden Versicherten zu berechnen:

$$S(x) = A \cdot \frac{q}{1000}$$

$A_x$  = Anzahl der Versicherten zu Jahresbeginn mit  $\frac{q}{1000}$  als Sterberate in Promille und  $A$  als Zahl der Versicherten am Jahresanfang.



Nachdem diese zuletzt erarbeitete Formel nochmals diskutiert wurde, kamen die Schülerinnen und Schüler zu dem Ergebnis, dass nicht der sterbende Teil der Versicherten berechnet werden sollte, sondern die Überlebenden:

$$\ddot{U}(x) = \frac{\ddot{U}(x-1) - U(x-1) q_x}{1000}$$

$\ddot{U}(x)$  : = Überlebende Versicherte der Altersgruppe x

$\ddot{U}(x-1)$  : = Versicherte, die in das Jahr x eintreten

$q_x$  : Anzahl der Sterbenden mit Alter x pro Jahr in Promille (aus einer Sterbetabelle)

Das hieß für die Kopfschäden:

$$W(x) = K_S(x) \ddot{U}(x)$$

Um die Formel auf ihre Plausibilität zu überprüfen, führten die Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle die Berechnung der Überlebenden (von 1000) der ersten zwei Jahre durch und befanden das Ergebnis für brauchbar.

Anschließend wechselten wir in den PC-Raum, um die Zahl der Überlebenden nach 80 Jahren (Alter 100) zu berechnen und darauf basierend die verursachten Gesamtkopfschäden zu ermitteln. Diese wurden verglichen mit den Gesamtkopfschäden ohne Berücksichtigung der Sterberate.

Bei der Arbeit am PC wandelte sich die Gruppenarbeit schlagartig in Einzelarbeit, was sich darin niederschlug, dass am Ende der Stunde fünf verschiedene Ergebnisse vorlagen.

Nun ergab sich die Notwendigkeit zu ergründen, wie die unterschiedlichen Ergebnisse zustande gekommen waren und sich auf eine Form zu einigen.

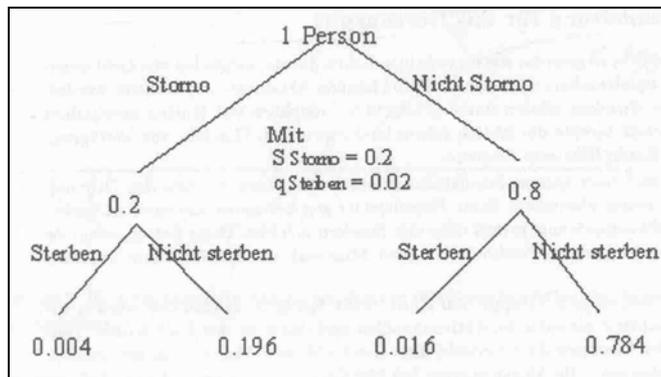
Nachdem dies geschehen war, kamen Überlegungen zur Inflation und ihrem Einfluss auf die Beitragsentwicklung auf. Diese Überlegungen waren sehr verwickelt und langwierig und wurden daher am Ende verworfen. Des Weiteren wurde der Einbezug der stornierenden Versicherten angedacht und in diesem Zusammenhang auch die Frage gestellt, ob und wie Neuzugänge der Versicherung zu berücksichtigen seien.

Es wurde nun also versucht, anhand einer Stornotabelle die Stornowahrscheinlichkeit in die angelegte Excel-Tabelle einzuarbeiten. Dabei stellte sich die Frage, wie Sterbe- und Stornozahlen zu verknüpfen seien. Als Möglichkeit stand zur Debatte, die Sterbenden und die Stornierenden eines Jahres getrennt zu berechnen und anschließend zu addieren, oder aber die Prozent- bzw. Promillezahlen durch Multiplikation zu verknüpfen. Von den Studierenden kam



der Vorschlag, sich das Problem anhand eines Baumdiagramms zu veranschaulichen:

**Abbildung 11: Baumdiagramm zu Storno- und Sterbewahrscheinlichkeit**



Das Baumdiagramm (siehe Abbildung 11) machte deutlich, dass am Ende eines Jahres nur in der Versicherung verbleibt, wer weder storniert noch stirbt, was sich in der Berechnung der in der Versicherung Verbleibenden als multiplikative Verknüpfung der Nichtstornierenden mit den Nichtsterbenden darstellte.

Ausgehend von einer Person errechnete sich die Anzahl der prozentual Verbleibenden nach Ablauf eines Jahres also folgendermaßen:

$$\text{Verbleibende} = 1 \text{ Person} (1 - \text{Storno}) (1 - \text{Sterbe})$$

Zusammengefasst war die Gruppe nun – ausgehend vom Ansatz, dass die Einnahmen gleich der Kosten sein sollten – also bei folgender Formel zur Berechnung der Einnahmen angelangt:

$$E = K_s \sum_{i=21}^{100} p_i \left( \frac{1 - q_{i-1}}{1000} \right) \left( \frac{1 - S_{i-1}}{100} \right)$$

Dabei ist  $q_i :=$  Sterberate in Promille,  $S_i =$  Stornorate in Prozent,  $K_s =$  Grundkopfschaden,  $p_i =$  Profilverwert,  $K_s * p_i =$  Kopfschaden im Jahr  $i$ .

Bei Berechnungen mit dieser Formel stellte sich heraus, dass sich Beiträge von etwa 17,- DM ergeben hätten, was als unglaublich erkannt wurde. Es stellte sich also die Frage, wo Fehler in der Berechnung liegen könnten.

Bei näherer Betrachtung der Vorgangsweise wurde bemerkt, dass die Kosten zwar unter Berücksichtigung von Sterbe- und Stornoraten berechnet wurden, die Einnahmen jedoch auf der Annahme basierten, dass alle Versicherten das 100ste Lebensjahr erreichten. Als Konsequenz wurden auch bei der Berechnung der Einnahmen die aus der Versicherung Ausscheidenden berücksichtigt:

$$\text{Einnahmen} = \sum_{i=21}^{100} B_j \left( \frac{1 - q_{i-1}}{1000} \right) \left( \frac{1 - S_{i-1}}{100} \right)$$

Für die Berechnung des Jahresbeitrags ergab sich also



$$B_j = \frac{K_s \sum_{i=21}^{100} p_i \left(\frac{1-q_{i-1}}{1000}\right) \left(\frac{1-S_{i-1}}{100}\right)}{\sum_{i=21}^{100} \left(\frac{1-q_{i-1}}{1000}\right) \left(\frac{1-S_{i-1}}{100}\right)}$$

Die Schülerinnen und Schüler meinten an dieser Stelle, die Terme nach den Summenzeichen würden sich wegekürzen, was den Großteil der Arbeit der letzten Wochen obsolet machen würde. Bei näherer Betrachtung wurde ihnen die Besonderheit dieses Bruches im Zusammenhang mit dem Summenzeichen aber deutlich.

Anschließend wurden die folgenden möglichen Weiterführungen des Projekts gesammelt:

- Einarbeitung der festen Kosten wie Verwaltung, Fuhrpark, Immobilien
- Berücksichtigung der Inflation bei der Kostenentwicklung
- Umarbeitung auf einen Monatstarif, um die Differenzen durch die Frage "Stirbt ein Versicherter vor oder nach Zahlung seines Jahresbeitrages?" zu verkleinern
- Berücksichtigung der Verzinsung von Überschüssen, die sich in jungen Jahren ansammeln, in denen die Beiträge höher sind als die verursachten Kosten

Eine Abstimmung ergab, dass zunächst die Verzinsung von Überschüssen erarbeitet werden sollte und abschließend, falls dazu noch Zeit sei, die Einarbeitung der festen Kosten.

Bei den Überlegungen zum ersten Punkt wurde ein „Überschusskonto“ eingeführt, auf das die Differenz zwischen Kosten und Beitragseinnahmen jeweils aufgebucht und auch gleich entsprechend verzinst werden sollte. Daraus ergab sich der Anspruch, dass dieses Konto am Ende der Versicherungsdauer, also per Definition zum 100sten Lebensjahr des Versicherten, wieder auf Null gesunken sein müsste, damit die Versicherung kostendeckend arbeite.

Des Weiteren erstellte die Gruppe eine Alternativberechnung, in der die Annahme für den Sterbe- bzw. Stornozeitpunkt auf den Jahresanfang gelegt wurde. Der Vergleich der daraus resultierenden Beiträge mit denen für die Annahme zum Jahresende ergab eine erhebliche Differenz. Damit stand fest, dass es erforderlich sein würde, zu einer monatlichen Berechnung überzugehen. Dies war aus Zeitgründen jedoch nicht mehr möglich.



Nach Beendigung der schulischen Aufarbeitung des Modellierungsproblems gab es auf Wunsch der Schülerinnen und Schüler noch drei private Treffen, um die offen gebliebenen Punkte des Projektes noch so weit wie möglich abzarbeiten.

Bearbeitet wurden dabei die Umstellung der gesamten Berechnung auf monatliche Beitragszahlung und monatliches Stornieren und Sterben. Zugrunde gelegt wurde dabei die Annahme, dass die Sterbe- und Stornoraten jeweils gezwölftelt und dann auf einen Monat angewendet werden können.

Die Gruppe erwartete einen neuen Monatsbeitrag, der sich betragsmäßig irgendwo zwischen den Jahresanfangs- und Jahresendbeträgen ansiedeln würde. Das war allerdings nicht der Fall, sondern der neu ermittelte Betrag lag ca. 10,- DM über dem bisher höheren der beiden Tarife. Der Grund für diese Differenz wurde in fehlerhaft übertragenen Startwerten oder sonstigen Ungenauigkeiten beim Vergrößern der Tabellen auf monatliche Berechnung vermutet. Immerhin waren die Tabellen mit diesem Schritt von ursprünglich 80 Zeilen (für die Lebensjahre 21 bis 100) auf nun  $80 \cdot 12 = 960$  Zeilen angewachsen, was mit viel Handarbeit und damit möglichen Fehlerquellen verbunden war.

Die Ursache war jedoch eine andere:

Die Gruppe hatte die Sterbe- und Stornorate einfach gezwölftelt. Die eigentliche Forderung an eine monatliche Sterberate war aber, dass die Anzahl der Überlebenden nach zwölfmaliger Anwendung der monatlichen Sterberate gleich der Anzahl der Überlebenden nach einmaliger Anwendung der Jahressterberate sein musste.

Als Gleichung ausgedrückt sieht das so aus:

$$\begin{aligned}
 x \left( \frac{1-q_m}{1000} \right)^{12} &= x \left( \frac{1-q}{1000} \right) \\
 \Leftrightarrow \left( \frac{1-q_m}{1000} \right)^{12} &= \left( \frac{1-q}{1000} \right) \\
 \Leftrightarrow 1 - \frac{q_m}{1000} &= \sqrt[12]{1 - \frac{q}{1000}} \\
 \Leftrightarrow q_m &= 1000 \left( 1 - \sqrt[12]{1 - \frac{q}{1000}} \right)
 \end{aligned}$$

wobei x die Überlebenden vom Dezember des Vorjahres sind.

Hiermit ergab sich dann ein monatlicher Beitrag, der erwartungsgemäß zwischen den vorher ermittelten Werten für Sterben und Stornierung am Jahresanfang bzw. -ende lag.



Am Gymnasium Ohmoor ist der Modellierungsprozess ähnlich abgelaufen wie am Gymnasium Heidberg, weshalb an dieser Stelle auf eine ausführliche Darstellung des Prozesses verzichtet werden soll.

Ein entscheidender Unterschied war, dass ein Schüler dieses Kurses ein Programm geschrieben hat, in das man alle losen Parameter eingeben kann und dann automatisch den Tarif für den entsprechenden Versicherungsnehmer ausgegeben bekommt. Als Parameter waren die Verzinsung des sich anfangs ansammelnden Kapitals und das Eintrittsalter des Versicherungsnehmers in die Versicherung einzugeben.

### 3.3.2. Weiterführende Ideen der Studierenden

Bei diesem Beispiel haben die Studierenden sich nicht weitergehend mit dem Beispiel beschäftigt, wodurch hier keine weiteren Ideen dargestellt werden können.

### 3.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt

Zu Beginn des Projekts taten sich alle Gruppen, die an diesem Modellierungsbeispiel gearbeitet haben, schwer. Den Schülerinnen und Schülern war die Fragestellung zu offen, und so fragten die Schülerinnen und Schüler auch immer wieder nach einer Präzisierung bzw. Eingrenzung der Frage.

Trotz dieser Schwierigkeiten wurde das Projekt von den Schülerinnen und Schülern sehr positiv aufgenommen. Einige Schülerinnen und Schüler äußerten auch den Wunsch, das Projekt fortzuführen, bis sie zu einem, in ihren Augen vernünftigen, Ergebnis gekommen seien.

### 3.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses

Am Emilie-Wüstenfeld Gymnasium ist sehr viel Zeit zur Klärung des Sachverhaltes verwendet worden. Außerdem gestaltete sich die Modellierungsarbeit besonders problematisch, da die Schülerinnen und Schüler dieses Kurses sehr auf Routinen versteift waren und somit erwarteten, Vorgaben und Lösungswege vorgesetzt zu bekommen.

Dementsprechend fällt die Mathematisierung der Problemstellung mehr als enttäuschend aus. Die Schülerinnen und Schüler waren nicht in der Lage, sich von vorgegebenen Tabellen und Grafiken zu lösen, und es fehlte an Motivation, weiterführende Modelle als das Addieren der Kosten und diese dann durch die Anzahl der eingehenden Werte zu teilen, zu erschließen. Auch die Fähigkeit,



Lösungswege selbst zu entwickeln, war in diesem Kurs wenig ausgeprägt. Der Schritt der Modellbildung war genauso wenig geläufig, wie der des Mathematisierens.

Zudem fehlte es diesen eher schwachen Schülerinnen und Schülern an Erfolgserlebnissen, die eventuell neue Motivation freigesetzt hätten. Für diese Gruppe war der Sachverhalt zu komplex.

Am Gymnasium Heidberg gestaltete sich der Modellierungsablauf – vielleicht auch durch die Entscheidung der Studierenden, nicht gleich alles Material hineinzureichen und den Modellierungsprozess mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam zu durchlaufen – wesentlich erfolgreicher.

Die Schülerinnen und Schüler waren hoch motiviert, selbständig und bereit, sich auf die neuen Arbeitsweisen einzulassen. Dies zeigte sich auch in ausufernden Diskussionen und der Tatsache, dass die Schülerinnen und Schüler den Wunsch äußerten, nach Ablauf der zur Verfügung stehenden Zeit weiter zu arbeiten.

Dadurch, dass diese Gruppe tatsächlich einen Modellierungsprozess durchlief, der durch die stetige Veränderung des Modells geprägt war, lernten die Schülerinnen und Schüler, Irrwege als Teil des Prozesses zu erkennen. Außerdem lernten sie, Verbindungen zwischen diversen mathematischen Themengebieten, wie Prozentrechnung, Stochastik oder Funktionen und Graphen zu erkennen.

Positiv war auch, dass die Schülerinnen und Schüler durch die ausführliche Diskussionen ihre Argumentationsfähigkeit verbesserten. Während anfangs unterschiedliche Positionen regelmäßig zu Streit führten, war zu beobachten, dass im Verlauf des Modellierungsprozesses an solchen Stellen konstruktive Diskussionen entstanden.

Auch einige Studierende gaben am Ende des Prozesses an, viel Neues gelernt zu haben und sahen das Seminar als Bereicherung für Universität und Schule.

Am Gymnasium Ohmoor hatte sich der Kurs das Projekt der Krankenversicherungen nicht selber ausgewählt. Da die Schülerinnen und Schüler die anderen Vorträge gehört hatten und sich teilweise lieber mit einem der anderen Probleme beschäftigt hätten, gab es in dieser Gruppe einige Motivationsprobleme.

Das Thema der Krankenversicherung wurde von den Beteiligten an dieser Schule als sehr anspruchsvoll eingestuft. Neben den auftretenden mathematischen Problemen, gab es Probleme mit dem Verständnis des Versicherungs-



wesens. So gaben auch die Studierenden an, sich teilweise sehr unsicher gefühlt zu haben.

Problematisch war, dass durch die Gruppenarbeit eine hohe soziale Kompetenz von den Schülerinnen und Schülern verlangt wurde. Es galt, alle in das Projekt einzubinden, was der Gruppe aber nicht möglich war. Daher haben die schwächeren Schülerinnen und Schüler schnell die aktive Mitarbeit aufgegeben.

Ein weiteres spezielles Problem in dieser Gruppe war, dass die Studierenden angehalten waren, sich Gedanken zur Notengebung für den Zeitraum des Modellierungsprozesses zu machen. Da ein Modellierungsprozess für alle Beteiligten sehr anspruchsvoll ist und dies gerade für die Studierenden gilt, weil sie im doppelten Sinne „ins kalte Wasser“ geschmissen wurden, kam es in dieser Hinsicht zu einer Überforderung der Studierenden.

Trotzdem wurde auch in dieser Gruppe der Gesamtprozess positiv bewertet. So gab es neue Bezüge zwischen den Themengebieten Analysis, Stochastik und Prozentrechnung zu entdecken, was diverse Male zu „Aha-Effekten“ führte. Den Schülerinnen und Schülern wurde der Bezug zwischen Mathematik und Realität deutlich, und auch schwache Schülerinnen und Schüler konnten sich bei der anfänglichen Problematisierung einbringen. Außerdem lernten die Schülerinnen und Schüler neue Denkweisen kennen

Positiv war auch der Computereinsatz. Der Rechner fungierte in dieser Gruppe als Umformer, Darsteller, Rechenknecht und vor allen Dingen als Programmausführer.



## 4. Bestmögliche Stationierung von Rettungshubschraubern in Südtirol

### 4.1. Zusammenfassung

Für diese Modellierungsaufgabe wurden Daten aus einem realen Skigebiet in Südtirol verwendet. Tabellarisch gegeben waren Orte des Skigebietes und die zugehörigen Unfallhäufigkeiten. Weiterhin waren die globalen Koordinaten der Unfallorte bereits in die Koordinaten eines Koordinatensystems umgerechnet. Die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler war es nun, die Orte für die möglichst gute Stationierung von drei Rettungshubschraubern zu finden und deren Einsatzorte zu bestimmen.

Neben weiteren Modellannahmen (zum Beispiel beliebige Stationierung der Hubschrauber) muss hierbei zuerst festgelegt werden, was einen möglichst guten Standort für einen Hubschrauber ausmacht. Möglich wäre beispielsweise eine Stationierung mit möglichst kurzen Wegen zum entferntesten Unfallort oder mit möglichst kurzen Wegen zu den Orten mit der größten Unfallhäufigkeit.

Ein erster Zugang für dieses Problem war für die Schülerinnen und Schüler eine graphische Vorgehensweise: in das Koordinatensystem wurden drei Kreise gelegt, die alle Unfallorte überdeckten; als Hubschrauberstandorte wurden dann die drei Kreismittelpunkte gewählt. Eine Weiterentwicklung dieses Ansatzes war die Bestimmung des Standortes des Hubschraubers in einem begrenzten Gebiet aus der Gewichtung der Koordinaten durch die Unfallhäufigkeiten.

Weiterführende Überlegungen der Schülerinnen und Schüler befassten sich unter anderem mit der Bestimmung geometrischer Gebilde, zum Beispiel Dreiecke, im Skigebiet und der Bestimmung der Schwerpunkte dieser Gebilde. Die Schwerpunkte wurden dabei teilweise unter Berücksichtigung der Unfallhäufigkeiten ermittelt. Generell bietet dieses Modellierungsbeispiel insbesondere viele Lösungsmöglichkeiten aus dem Bereich der Geometrie, wegen der Gewichtungen durch die Unfallhäufigkeiten können darüber hinaus Überlegungen zur Metrik einfließen.

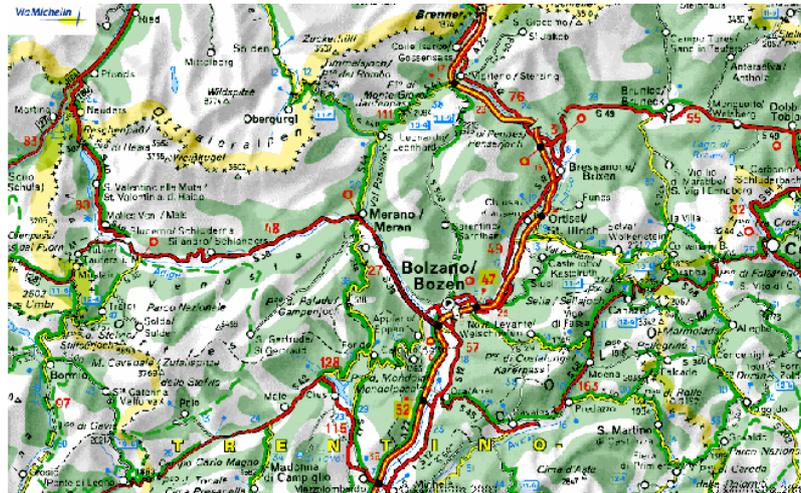
Teilweise haben Arbeitsgruppen das Problem darüber hinaus zuerst vereinfacht, indem sie zum Beispiel nur die Stationierung eines Hubschraubers ermittelt haben.



#### 4.2. Problemdarstellung

Gegeben war ein Skigebiet in Südtirol (Abbildung 12), für welches die Unfallhäufigkeiten an verschiedenen Orten angegeben waren, wobei der Zeitraum nicht näher spezifiziert war. Als Hilfe wurden die realen Weltkoordinaten der Orte bereits vorab in ein Koordinatensystem transferiert (siehe Abbildung 13). Diese Ortskoordinaten

**Abbildung 12: Karte der Einsatzregion**



standen den Schülerinnen und Schülern zusammen mit den Unfallhäufigkeiten in Form einer Tabelle zur Verfügung (siehe Abbildung 14).

In diesem Skigebiet stehen einer Hilfsorganisation namens "das Weiße Kreuz" drei Rettungshubschrauber zur Verfügung. Die Hilfsorganisation versucht den bei Skiunfällen Verunglückten möglichst schnell zur Hilfe zu kommen.

**Abbildung 13: Lage der Orte an denen Unfälle passierten.**

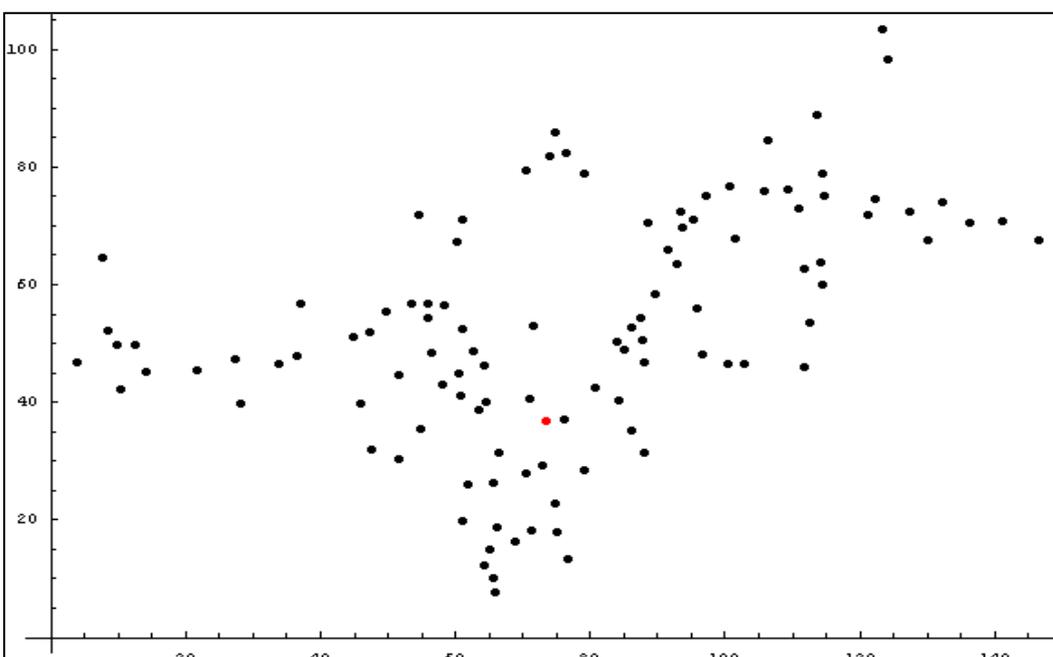




Abbildung 14: Koordinaten und Unfallhäufigkeiten im Skigebiet

Orte	X	Y	N	Orte	X	Y	N	Orte	X	Y	N
Abtei	112,50	53,50	53	Lajen	87,75	50,50	11	Schenna	58,50	56,50	14
Ahrntal	124,25	98,25	26	Lana	56,50	48,25	4	Schlanders	27,50	47,25	21
Aldein	74,75	22,75	12	Latsch	34,00	46,50	8	Schluderns	12,50	49,75	1
Algund	53,50	56,75	3	Laurein	51,75	30,25	1	Schnals	37,00	56,75	40
Altrei	76,75	13,25	4	Leifers	73,00	29,25	5	Sexten	146,50	67,50	20
Andrian	63,50	38,50	2	Lüsen	101,50	67,75	11	St. Christina	100,50	46,50	50
Auer	61,25	19,75	15	Mals	8,50	52,00	20	St. Leonhard	61,00	71,00	16
Barbian	84,00	50,25	8	Margreid	64,25	12,25	7	St. Lorenzen	111,00	73,00	1
Bozen	73,50	36,75	96	Martell	28,25	39,75	7	St. Martin i, P.	60,25	67,25	19
Branzoll	62,00	26,00	4	Meran	56,00	54,25	32	St. Martin i, T.	111,75	62,50	12
Brenner	75,00	85,75	10	Möltan	64,25	46,25	14	St. Pankraz	51,75	44,50	13
Brixen	93,00	63,50	81	Montan	71,25	18,00	4	St. Ulrich	96,75	48,00	31
Bruneck	114,75	75,00	78	Moos	54,75	71,75	15	Sterzing	74,00	81,75	27
Corvara	111,75	46,00	62	Mühlbach	93,50	72,25	51	Stilfs	10,50	42,25	40
Deutschnofen	79,25	28,50	53	Mühlwald	106,50	84,50	3	Taufers	4,00	46,75	3
Enneberg	114,25	63,75	19	Nals	60,75	41,00	5	Terenten	100,75	76,75	6
Eppan	66,50	31,25	7	Naturns	45,00	51,00	9	Terlan	64,75	40,00	3
Feldthurns	89,75	58,25	8	Natz-Schabs	93,75	69,75	1	Tiers	86,25	35,25	24
Franzensfeste	88,75	70,50	3	Neumarkt	69,00	16,25	38	Tirol	56,00	56,75	2
Freienfeld	79,25	78,75	4	Olang	121,25	71,75	10	Tiesens	58,25	43,00	6
Gais	114,50	78,75	2	Partschins	49,75	55,25	8	Toblach	136,25	70,50	8
Gargazon	60,50	44,75	5	Pfalzen	109,50	76,00	2	Tramin	66,25	18,75	10
Glurns	10,00	49,75	2	Pfatten	70,50	27,75	2	Truden	75,25	17,75	8
Graun	7,75	64,50	19	Pfitsch	76,50	82,25	7	ULF-St. Felix	55,00	35,50	5
Gsies	132,25	74,00	5	Plaus	47,50	51,75	1	Ulten	46,00	39,75	38
Hafling	61,25	52,25	21	Prad	14,25	45,00	1	Vahrn	91,50	65,75	3
Innichen	141,25	70,75	13	Prags	130,25	67,50	8	Villanders	86,25	52,75	9
Jenesien	71,00	40,50	20	Prettau	123,50	103,25	7	Villnöß	96,00	56,00	18
Kaltern	65,75	26,25	30	Proveis	47,75	31,75	3	Vintl	97,25	75,00	13
Karneid	76,25	37,00	12	R.-Antholz	122,25	74,50	10	Völs	84,25	40,25	21
Kastelbell	36,50	47,75	3	Ratschings	70,50	79,25	38	Vöran	62,75	48,50	1
Kastelruth	88,00	46,75	76	Ritten	80,75	42,50	69	Waidbruck	85,25	49,00	4
Kiens	106,00	75,75	5	Rodeneck	95,25	71,00	7	Welsberg	127,50	72,25	3
Klausen	87,50	54,25	22	Salurn	66,00	7,50	12	Welschnofen	88,00	31,25	36
Kurtatsch	65,25	15,00	4	Sand	113,75	88,75	29	Wengen	114,50	60,00	4
Kurtinig	65,75	10,00	1	Sarntal	71,75	53,00	42	Wolkenstein	103,00	46,50	107
Laas	21,75	45,50	1								

Das Modellierungsproblem bestand nun darin, die Hubschrauber möglichst gut zu stationieren. Hierbei war es die Aufgabe der Schüler, mathematisch präzise für sich zu definieren, was genau unter einer "möglichst guten" Platzierung der Hubschrauber zu verstehen ist. Außerdem sollten später die Einsatzorte der Hubschrauber angegeben werden.

### 4.3. Problemlösungen

#### 4.3.1. Ansätze der Schülerinnen und Schüler:

Bei diesem Beispiel haben die Schülerinnen und Schüler in drei verschiedenen Gruppen die Aufgabe modelliert. Die Arbeit dieser Gruppen wird im Folgenden aufgezeigt.

Zu Beginn gingen die Schülerinnen und Schüler der ersten Gruppe so vor, dass sie zwischen den "äußeren" Punkten in Grafik 3 Verbindungslinien einzeichneten. Dadurch wollten sie ein Gebiet erhalten, das alle Unfallorte umschließt. Die "äußeren" Punkte, welche die Fläche begrenzen sollten, haben sie dabei relativ willkürlich gewählt und auf diese Weise verschiedene Versuche unternommen, ein n-Eck zu erstellen. Von diesem sollte in der Folge der Schwerpunkt ermittelt



werden, wobei eine Gewichtung gemäß der Unfallhäufigkeiten vorgenommen werden sollte. Nachdem der Gruppe bewusst geworden war, dass nicht einer, sondern drei Rettungshubschrauber in dem Skigebiet stationiert werden sollten, gab sie diesen Ansatz auf.

Erst im Anschluss an diese Überlegungen begannen Schülerinnen und Schüler damit, Annahmen zu treffen und weitere Vereinfachungen vorzunehmen. Ihre erste Annahme war, dass die unterschiedlichen Hubschrauber auch unterschiedlichen Einsatzgebieten zugeordnet werden müssten. Bei diesen drei Gebieten sollte die Summe der Unfälle übereinstimmen, so dass eine gleichmäßige Ausnutzung der Kapazitäten gewährleistet ist. Des Weiteren haben sie angenommen, dass die Hubschrauber überall positioniert werden könnten. Es wurden also die geographischen Eigenheiten des Skigebietes vernachlässigt. Die "beste Platzierung" wurde dahingehend interpretiert, dass der jeweilige Hubschrauber möglichst schnell am Einsatzort sein sollte, also wurde ein Schwerpunkt auf die Erstversorgung gelegt. Dies bedeutete für die Gruppe wiederum, dass die Wege, welche ein Hubschrauber von seinem Standort zu den Einsatzorten zurückzulegen hat, möglichst kurz sein sollten. Es wurde zudem die Vereinfachung vorgenommen, dass jeder Hubschrauber nur einen Einsatz zur Zeit zu fliegen hat. Das heißt, es wurde von vornherein ausgeschlossen, dass mehr als ein Unfall zur gleichen Zeit in einem Einsatzgebiet passiert.

Anschließend wurde das Skigebiet in drei Bereiche aufgeteilt. Diese wurden als möglichst kleine Kreise eingezeichnet, welche alle Unfallorte überdecken. Überlappungen wurden hierbei zugelassen. Die Hubschrauber wurden nun im Mittelpunkt des jeweiligen Kreises platziert. Die Kreise wurden alle gleich groß gewählt, damit alle Hubschrauber einen gleichen maximalen Weg zurückzulegen hätten. Außerdem wurde geprüft, ob die Anzahl der Einsätze innerhalb der gezeichneten Kreise für die jeweiligen Hubschrauber gleich groß wären, was allerdings nicht der Fall war. Als Lösung für dieses Problem haben die Schülerinnen und Schüler vorgeschlagen, dass die Überlappungsregionen eher von den Hubschraubern bedient werden sollten, die insgesamt weniger Einsätze zu fliegen haben.

Die zweite Gruppe traf ähnliche Annahmen wie die erste Gruppe. Es wurde ein besonderes Augenmerk auf die Erstversorgung gelegt. Die geographischen Gegebenheiten wurden vernachlässigt. Allerdings hatte diese Gruppe bei der Aufteilung des Skigebietes, welches auch hier aus drei unabhängigen Einsatzgebieten bestehen sollte, auf eine genaue Trennung der einzelnen Gebiete geachtet. Die Einteilung erfolgte dabei folgendermaßen: Durch das Skigebiet wurden parallel zur y-Achse zwei Linien gezeichnet, welche die drei Einsatzgebiete von Ost nach West einteilen sollten. Zur Bestimmung der Trennlinien hat die Gruppe die Orte von Ost nach West anhand der gegebenen



x-Koordinaten geordnet und das Skigebiet anschließend in drei Gebiete mit ungefähr gleicher Unfallhäufigkeit aufgeteilt. Die Diskrepanzen bei den Einsatzzahlen wurden durch den Austausch einzelner Orte in den Randgebieten der Einsatzgebiete reduziert, bis die Gruppe der Ansicht war, dass die Unterschiede akzeptabel wären.

Die Standorte der Hubschrauber innerhalb der so erhaltenen Gebiete ermittelten die Schülerinnen und Schüler durch Berechnung des Schwerpunktes. Um die x-Koordinate des jeweiligen Standortes zu ermitteln, wurden die x-Koordinaten der Einsatzorte mit der zugehörigen Unfallhäufigkeit multipliziert. Diese Werte wurden summiert und durch die Gesamtzahl der Unfälle geteilt. Bei der Berechnung der y-Koordinate wurde analog verfahren.

Auch die dritte Gruppe machte es sich zum Ziel, die Wege, welche die Hubschrauber zurücklegen müssen, möglichst kurz zu wählen, um eine möglichst schnelle Erstversorgung zu gewährleisten. Wie bei den Gruppen zuvor sollten geologische Besonderheiten des Geländes nicht berücksichtigt werden. Nachdem die Schülerinnen und Schüler ihre Annahmen getroffen hatten, teilte sich diese Gruppe, da zwei verschiedene Lösungswege verfolgt wurden.

Die männlichen Gruppenmitglieder beschäftigten sich intensiv mit einer geometrischen Lösung der Aufgabe. Hierbei vereinfachten sie das Problem zunächst auf zwei Orte und einen Hubschrauber, um das Modell anschließend auf drei Orte und einen Hubschrauber zu erweitern. Sie versuchten hierbei, den Standort des Hubschraubers dadurch zu ermitteln, dass sie die Punkte zu einem Dreieck verbanden, um dessen - mit den Unfallhäufigkeiten gewichteten - Schwerpunkt zu bestimmen. Allerdings entschlossen sie sich im Verlauf des Seminars dazu, den Ort für die Stationierung des Rettungshubschraubers auf die gleiche Weise zu bestimmen, wie dies bei Gruppe 2 beschrieben ist.

Die Einsatzgebiete, auf welchen die jeweiligen Hubschrauber operieren sollten, wurden durch einen "Dreimeilenstein" in der Mitte der Karte gekennzeichnet, von dem aus drei Linien gezogen wurden. Dabei sollte die erste parallel zur y-Achse verlaufen, die beiden anderen wurden im Winkel von  $120^\circ$  beziehungsweise  $240^\circ$  zu dieser eingezeichnet. Damit wollten die Schüler relativ kleine Einsatzgebiete für die jeweiligen Rettungshubschrauber erhalten, ihre Einteilung war allerdings recht willkürlich. Da diese Gruppe viel Zeit auf die Bearbeitung des stark vereinfachten Modells verwendet hatte, kamen die Schüler nicht sehr weit und waren mit ihrem Ergebnis nicht zufrieden.

Die weiblichen Gruppenmitglieder hingegen bearbeiteten das Problem, indem sie festlegten, dass die Summen der Strecken gleich groß sein sollten, welche die Hubschrauber in ihren Einsatzgebieten zurücklegen. Dadurch sollte eine gleiche Arbeitsverteilung erreicht werden. Jedem Unfallort sollte dabei ein



Rettungshubschrauber zugeordnet werden, Überlappungen bei den Einsatzgebieten wurden also ausgeschlossen. Die Einteilung der Einsatzgebiete war auch hier sehr Ost-West gebunden.

In den so ermittelten Einsatzgebieten wurde der Standort des jeweiligen Hubschraubers durch Berechnung des Schwerpunktes festgelegt. Hierbei hatten die Schülerinnen im Gegensatz zu den anderen Gruppen keine Gewichtung gemäß der Unfallhäufigkeiten vorgenommen. Da es ihr Ziel war, dass die Rettungshubschrauber den jeweiligen Einsatzort möglichst schnell erreichen sollten, wollten sie alle Wege innerhalb eines Einsatzgebietes möglichst kurz gestalten.

#### 4.3.2. Weiterführende Ideen der Studierenden

Leider lagen auf Grund der Seminarstruktur die Bearbeitungen des Hubschrauberproblems durch die Studierenden bei dieser Zusammenfassung nicht vor, weshalb auf diesen Punkt leider verzichtet werden muss.

#### 4.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt

Insgesamt fühlten sich die Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Seminars überfordert und waren sehr unsicher, wie sie an das Problem herangehen sollten, denn Modellierungsaufgaben stellten etwas gänzlich Unbekanntes für sie dar. Daher war die Arbeit in allen Gruppen anfangs davon geprägt, erst bei den Annahmen und Vereinfachungen zu einem Konsens zu kommen, was sehr schwierig schien.

Insgesamt bemängelten die Schülerinnen und Schüler, dass die Mathematik während der gesamten Zeit nicht stark genug vertreten gewesen sei. Sie hätten ja gar nicht so viel rechnen müssen. Zudem empfanden sie die Zeit, welche ihnen zur Bearbeitung der Aufgabe zur Verfügung stand, als zu kurz.

Am Ende dieses Modellierungsbeispiels waren die meisten Schülerinnen und Schüler mit ihrer Arbeit nicht zufrieden und es wurde der Wunsch geäußert, sich beim nächsten Mal in kleinere Gruppen selber einteilen zu dürfen, um die Konflikte untereinander zu minimieren. Außerdem wurde der Mangel an Zeit kritisiert.

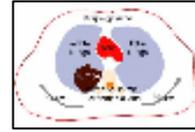
#### 4.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses

Dieses Beispiel scheint grundsätzlich zur Modellierung an der Schule sehr gut geeignet zu sein. Leider gab es in diesem Fall bei der Umsetzung einige Unwegsamkeiten. Zum Einen hatten die Schülerinnen und Schüler relativ wenig Zeit, sich mit der für sie neuen Modellierungssituation auseinander zu setzen,



zum Anderen lässt sich festhalten, dass die Teamfähigkeit der Schülerinnen und Schüler nicht sehr ausgeprägt war. Sehr oft war zu beobachten, dass Einzelne versuchten, unbedingt ihre Idee durchzusetzen und nicht in der Lage waren sich auf die Ideen anderer Schülerinnen und Schüler einzulassen. Des Weiteren waren die einzelnen Kleingruppen sehr unterschiedlich stark, wodurch in manchen Gruppen nur eine sehr zähe Kommunikation möglich war. Außerdem hatte die gesamte Gruppe Probleme, sich mit der Offenheit der Aufgabe abzufinden. Die Menge der Informationen, die aber gleichzeitig nicht ausreichte, um die Aufgabe vollständig zu lösen, war ungewohnt und somit unbefriedigend für die Schülerinnen und Schüler.

Die Studierenden selber hatten sich bei der Arbeit in den Gruppen vorgenommen, so wenig wie möglich einzugreifen, also minimale Unterstützung zu geben. Sie betrachteten es als ihre Aufgabe, evtl. mit Fachwissen weiter zu helfen, vor allem aber zu ermutigen, kritisch Dinge zu hinterfragen und die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler zu fördern. Diese Herangehensweise wurde von den Schülerinnen und Schülern positiv bewertet.



## 5. Strahlentherapieplanung bei Krebspatienten

### 5.1. Zusammenfassung

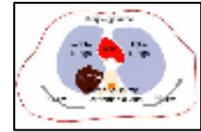
In diesem Modell geht es um die Optimierung der Strahlentherapie bei Krebspatienten. In der Strahlentherapie wird ein Krebstumor durch Bestrahlung zerstört. Um dabei umliegendes gesundes Gewebe möglichst wenig zu schädigen, wird der Tumor mit geringer Strahlungsintensität aus mehreren Richtungen bestrahlt. Die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler war es nun, ein Verfahren zu entwickeln, welches eine möglichst optimale Bestrahlung ermöglicht. Als Daten sind dabei die Konturen des Tumors sowie des umliegenden Gewebes und die benötigte Dosis im Tumor und die Toleranzdosen des umliegenden Risikogewebes gegeben. In der Aufgabe sollte zuerst bestimmt werden, wie optimal in diesem Zusammenhang definiert werden muss, anschließend sollten die Bestrahlungsrichtungen und die Stärken der Strahlungsintensität für diese Richtungen festgelegt werden.

Wiederum haben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zuerst die Sachgrundlagen erarbeitet, zum Beispiel den physikalischen Begriff der Strahlungsdosis sowie die Wirkung von Strahlung auf Gewebe.

Zur Lösung des Problems ist es sinnvoll, zuerst zu entscheiden, ob man das Problem im dreidimensionalen Raum betrachtet oder auf zweidimensionale Verhältnisse vereinfacht. Letzteres haben mehrere Arbeitsgruppen gemacht. Der Lösungsansatz einer Gruppe bestand dann in der Darstellung der Strahlungsrichtungen durch Geradengleichungen, ein Ansatz, der also die Lineare Algebra berücksichtigt. Überlegt wurde beispielsweise, wie die Geraden verlaufen müssen, um den Tumor, aber möglichst wenig Risikogewebe im Umfeld zu treffen. Weiterhin wurde versucht, Geraden zu finden, die möglichst viele Schnittpunkte im Tumor und möglichst wenige außerhalb aufweisen.

Die gesamte Problematik wurde von vielen Schülerinnen und Schülern zuerst graphisch gelöst. Hierbei wurden naturgemäß insbesondere verschiedene Konstellationen von Geraden auf ihren Nutzen geprüft. Weiterhin flossen beispielsweise Überlegungen ein, ob ein Tumor als Punkt oder ausgedehntes Gebilde modelliert werden sollte.

Einige Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben in diesem Modell darüber hinaus mathematische Zusammenhänge zur Beschreibung der Abschwächung der Strahlung im Gewebe formuliert, beispielsweise eine lineare Abnahme der Strahlungsstärke in Abhängigkeit von der Eindringtiefe in Gewebe.



## 5.2. Problemdarstellung

Bei dem Beispiel der „Strahlentherapie bei Krebspatienten“ handelt es sich um das Problem der Optimierung der Strahlentherapieplanung bei Krebspatienten. Bei dieser Behandlungsmethode geht es darum, einen Tumor durch Bestrahlung zu zerstören. Hintergrund für diese Methode bildet die Tatsache, dass Zellen mit einer hohen Teilungsrate - zu denen Krebszellen gehören - besonders strahlungsempfindlich sind und die vernichtende Wirkung bei diesen daher besonders hoch ist. Da es das Ziel ist, das benachbarte gesunde Gewebe so weit wie möglich zu schonen, wird das Krebsgeschwulst aus verschiedenen Richtungen mit einer geringen Dosis bestrahlt. Eine solche Teildosis beträgt ungefähr 2 Gray<sup>9</sup>. Um den Tumor zu vernichten, ist – abhängig von der Art des Tumors – an der Überlappung der Strahlen eine Energiedosis von insgesamt 40 bis 70 Gray notwendig.

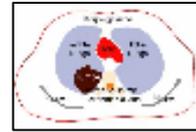
Die momentan übliche Bestrahlungsplanung läuft folgendermaßen ab: Zunächst wird mittels bildgebender Verfahren, wie zum Beispiel der Computertomographie, eine dreidimensionale Darstellung des tumorbefallenen Körperareals erstellt. Nachdem das Zielvolumen sowie die den Tumor umgebenden kritischen Bereiche spezifiziert wurden, erfolgt die Auswahl der Bestrahlungstechnik und -richtungen. Auf dieser Grundlage wird im Anschluss die Dosisverteilung berechnet. Die Bestrahlungsfelder werden nun solange verändert, bis sich eine zufriedenstellende Dosisverteilung ergibt, die dann grafisch in Form von Isodosenkurven, also Linien gleicher Dosiswerte, dargestellt wird. Bevor diese Therapie dann in der Praxis zur Anwendung kommt, findet allerdings noch eine Simulation des Bestrahlungsplanes statt.

Da dieses Verfahren zeitaufwendig ist und lediglich auf Erfahrungswerten der Strahlentherapeuten basiert, ist es das Ziel, ein Verfahren zu entwickeln, welches eine Optimierung der Strahlenintensitäten leistet. Als Vorgaben hierfür dienen die Konturen des Tumors und die Solldosis im Zielvolumen sowie die Umrisse der umliegenden Risikoorgane und deren Toleranzdosen.

In dieser Optimierung besteht auch die Modellierungsaufgabe für die Schüler. Es ist ihr Auftrag, eine Definition dafür zu finden, was ‚optimal‘ bedeutet, und nach dieser Maßgabe die Bestrahlungsrichtungen zu bestimmen sowie die notwendige Energiedosis sinnvoll auf diese Richtungen zu verteilen.

---

<sup>9</sup> Gray = 1Joule/1Kg ist die Einheit für die Energiedosis. Dabei ist Joule das Maß für die Energie, die von einer Strahlung abgegeben wird und Kg steht für die Masse des Körpers, der diese Energie aufnimmt.



### 5.3. Problemlösungen

#### 5.3.1. Ansätze der Schülerinnen und Schüler

Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten bei diesem Problem in drei unabhängig agierenden Gruppen. Im Folgenden sollen dementsprechend die Ergebnisse der einzelnen Gruppen getrennt voneinander betrachtet werden.

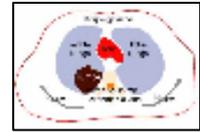
Die erste Gruppe begann damit, sich zunächst die für sie relevanten Daten aus dem Vortrag von Herrn Günther Gramlich heraus zu schreiben, wie zum Beispiel die Definition der Energiedosis, die Angaben zu den erforderlichen Dosismengen und die Vorgehensweise bei der Strahlentherapie. Im Anschluss haben die Gruppenmitglieder sich mit den gegebenen Daten auseinandergesetzt und die Frage diskutiert, an welchem Punkt der Bestrahlungsplanung die Modellierung einsetzt. Hierbei gab es Diskussionen darüber, ob auch die verschiedenen Bestrahlungsarten, wie zum Beispiel die Möglichkeit einer Wärmetherapie, in die Aufgabe mit einbezogen werden müssten.

Zunächst entschied die Gruppe sich, mit der Tumorbestrahlung im dreidimensionalen Raum auseinander zu setzen. Aufgrund der Komplexität dieses Vorhabens änderten sie diesen Plan und verlagerten das Problem in den zweidimensionalen Raum. Hierbei wollten sie versuchen, den Tumor scheibenweise zu betrachten, so, wie dieses bei einer Computertomographie der Fall ist. Allerdings ist die Gruppe mit dieser Überlegung nicht weitergekommen, da sie sich mit zu vielen Details aufhielt und in Diskussionen über Einzelheiten verstrickte.

Schließlich wurde das Ziel formuliert, einen Algorithmus im zweidimensionalen Raum zu finden, der eine Bestrahlung beschreibt, ohne dass die Toleranzgrenzen der Risikobereiche überschritten werden. Folgende Aspekte sollten dabei berücksichtigt werden:

- Die Abschwächung der Strahlen pro cm oder mm Gewebe.
- Die Stärke, welche die Strahlung besitzt, wenn sie den Tumor durchdringt.
- Die Toleranzdosen der Risikoorgane.

Zunächst beschloss die Gruppe, das Problem anhand eines Spezialfalls zu lösen, also anhand des Lungenkarzinoms, welches Herr Gramlich in seiner Präsentation als Beispiel benutzt hatte. Es folgte die Idee, das Bestrahlungsproblem als einen Kreis zu behandeln, dessen Mittelpunkt der Tumor darstellt und dessen Radius durch den maximalen Abstand des Tumors zum Bestrahlungsapparat definiert ist. Dieser Ansatz wurde aber nicht weiter verfolgt, ebenso wie der Versuch einer Veranschaulichung über ein Bild, das den Tumor,



den menschlichen Körper, den Bestrahlungsapparat sowie einzelne Strahlen wiedergibt. Der 'Problemlöseprozess' dieser Gruppe war damit bereits nach der ersten Doppelstunde weitestgehend abgeschlossen.

Im Anschluss haben sich die Gruppenmitglieder hauptsächlich damit befasst, im Internet nach detaillierten Informationen zu suchen, wie zum Beispiel nach Daten zu den Toleranzdosen der Risikoorgane, die im Anschluss auch den anderen Gruppen zur Verfügung gestellt wurden.

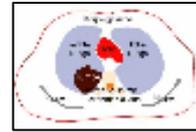
Es ist der Gruppe schwer gefallen, Vereinfachungen vorzunehmen. Jeder Ansatz in diese Richtung, wie zum Beispiel die Idee, den Tumor zunächst als Punkt zu behandeln, wurde gleich wieder verworfen. Der Gruppe war es wichtig, das Problem in seiner Komplexität zu betrachten, mit der Konsequenz, dass sie nicht dazu kam, ihre Gedanken konkret werden zu lassen und wirklich etwas zu berechnen. Daran hat sie zusätzlich die Tatsache gehindert, nur reale, wissenschaftliche Daten in die Problemlösung einfließen lassen zu wollen. Daher haben die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel ihre Überlegung, die Intensität der Strahlen müsse mit zunehmender Körpertiefe abnehmen, nicht praktisch umsetzen können, da sie auch diesbezüglich keine - von ihrem Wesen her unfundierten - Annahmen treffen wollten.

Letztlich haben sich die Gruppenmitglieder auf die Zielsetzung geeinigt, optimale Bestrahlungsrichtungen und die zugehörigen Dosen durch einen Algorithmus zu definieren. Dieses sollte am Beispiel eines Lungenkarzinoms mit einem Volumen von 500 ml bei einer vorgegebenen Solldosis von 60 Gray geschehen. Mittels der externen Strahlentherapie sollte der Tumor zerstört werden, möglichst unter Aussparen der kritischen Bereiche, womit sie solche Organe bezeichnen, die nicht mehr als 25 Gray vertragen, wie zum Beispiel Herz und Rückenmark (siehe Abbildung 15).

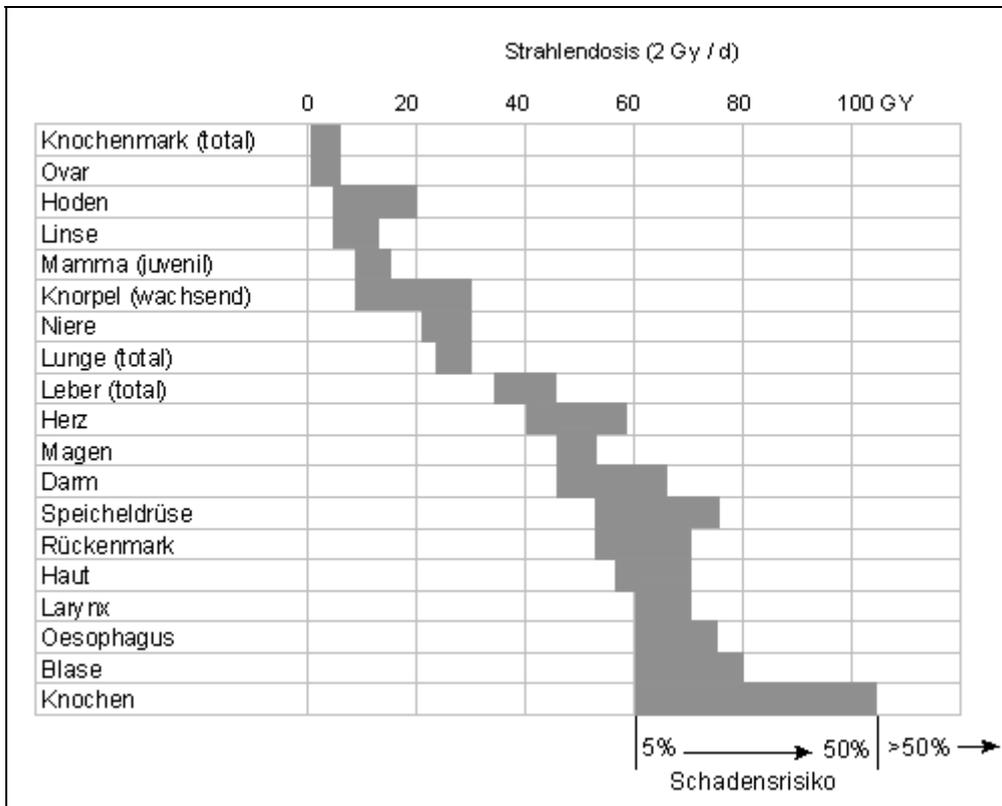
Dabei sollten folgende Vorgaben vorhanden sein:

- Die Konturen des Zielvolumens und der Risikoorgane (siehe Abbildung 16).
- Die Toleranzdosen der Risikoorgane (siehe Abbildung 15).
- Der Intensitätsverlust der Strahlen durch das Eindringen in das Gewebe.
- Die Regenerationszeit von gesundem Gewebe.

Zu den letzten beiden Punkten haben die Schüler keine Informationen gefunden.



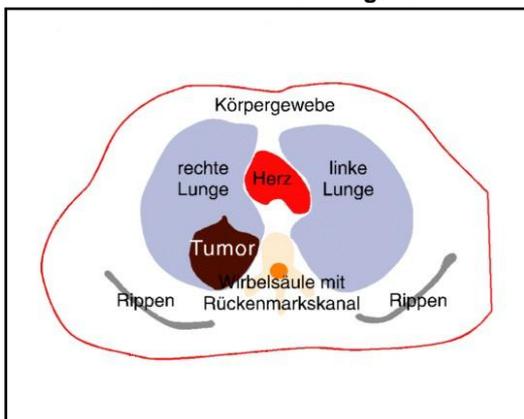
**Abbildung 15: Toleranzdosen gesunder Gewebe und Organe**



Quelle: [http://isqgw.cs.uni-magdeburg.de/~regina/skript\\_strahlentherapie.html](http://isqgw.cs.uni-magdeburg.de/~regina/skript_strahlentherapie.html)

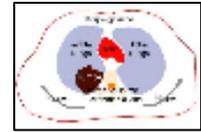
Als Gerät haben sie einen Linearbeschleuniger angenommen, der eine Bestrahlung aus allen Richtungen und Winkeln ermöglicht. Der Einfluss der Liege, auf welcher der Patient in dem Bestrahlungsapparat fixiert ist, soll dabei vernachlässigt werden. Die Strahlen selbst werden als Geraden begriffen, es findet demnach keine Streuung oder Reflexion statt, so dass eine punktgenaue Bestrahlung möglich ist.

**Abbildung 16: Die Konturen des Zielvolumens und der Risikoorgane**



Eine Überlegung der Gruppe bestand nun darin, den Tumor von gegenüberliegenden Seiten zu bestrahlen, was eine erhöhte Strahlungsintensität im Tumor zum Vorteil hätte. Da das umliegende Gewebe dadurch allerdings extrem stark belastet würde, wurde diese Idee wieder verworfen.

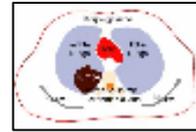
Leider war an diesem Punkt keine Zeit mehr weiter zu arbeiten, so dass diese Gruppe kein konkretes Ergebnis



vorweisen konnte und auch keine Rechnungen durchgeführt hat. Sie ist im Modellierungsprozess schon bei der Bildung des realen Modells hängen geblieben. Trotzdem hat sich die Gruppe intensiv mit dem Thema beschäftigt und durchaus kleinere Teilmodellierungen durchgeführt.

Die zweite Gruppe hat sich dem Strahlentherapieproblem genähert, indem sie zunächst die Präsentation von Herrn Günther Gramlich durchgearbeitet und sich im Anschluss ihre Aufgabe bei der Modellierung verdeutlicht hat. Auf der Grundlage der gegebenen Daten entspann sich nun eine Diskussion über vorzunehmende Vereinfachungen. Die Mädchen (es war eine reine Mädchen-gruppe) beschlossen, das Problem aufgrund seiner Komplexität in den zwei-dimensionalen Raum zu verlagern und die Strahlen dabei als Geraden in der Ebene zu behandeln. Mithilfe ihres aktuellen Unterrichtsthemas "Lineare Algebra und Analytische Geometrie" sollte auf dieser Basis eine Problemlösung gefunden werden. Über diesen Ansatz waren die Schülerinnen sich sehr schnell einig, und in der Folge wurde der Lösungsweg an sich weder nochmals thematisiert noch hinterfragt. Allerdings regten die Schülerinnen eine Diskussion über die Modellierung an sich dazu an, noch einmal über getroffene Annahmen und mögliche Vereinfachungen nachzudenken. So einigten sie sich beispielsweise darauf, eine Abschwächung der Strahlung beim Eindringen in das Gewebe außer Acht zu lassen. Um sich das Problem zu veranschaulichen, erstellten die Mädchen eine Zeichnung. Den menschlichen Körper stellten sie dabei zunächst als Kreis dar, später orientierten sie sich an dem Beispiel des Lungenkarzinoms (Abbildung 16). Sie entschieden sich, zunächst sechs Strahler um einen menschlichen Körper herum zu positionieren. Deren Richtungen wählten sie dabei relativ willkürlich und orientierten sich lediglich an der Lage der Risikoorgane, die bei der Bestrahlung möglichst gemieden werden sollten. Da die relativ hohe Anzahl an Strahlen eine zu komplexe Aufgabe für die Schülerinnen darstellte, einigten sie sich darauf, den Tumor lediglich aus vier Richtungen zu bestrahlen. Ihr Ziel war es, die Strahlen so zu wählen, dass diese sich im Tumor schneiden, um auf dieser Basis genaue Geradengleichungen angeben zu können.

Bei ihrer abschließenden Lösung hatte sich diese Gruppe das Ziel gesetzt, den Tumor möglichst schnell zu zerstören, wobei das umliegende Gewebe sowie die Risikoorgane so wenig wie möglich in Mitleidenschaft gezogen werden sollten. Um letzteres zu erreichen, sollten die Risikoorgane bei der Bestrahlung ausgespart werden, wo dieses möglich war, und die Strahlen sollten außerdem so positioniert werden, dass gesundes Gewebe nur minimal belastet wird. Daher sollen die Strahlen einen möglichst kurzen Weg durch den Körper zurücklegen, so dass sie eine möglichst geringe Abschwächung erfahren und so eine



maximale Strahlungsintensität das Tumorgewebe erreicht. Um die Intensität der Strahlung im Tumor zusätzlich zu erhöhen, sollen sich die Strahlen dort überlappen.

Um dieses Problem lösbar zu machen, haben die Schülerinnen folgende Vereinfachungen vorgenommen:

Die Strahlentherapieplanung für einen - von seinem Wesen her dreidimensionalen - Körper wird als Aufgabe in den zweidimensionalen Raum übertragen.

Hierbei werden die Strahlen als Geraden im  $\mathbb{R}^2$  behandelt, die weder gestreut noch reflektiert werden. Dabei steht jede Gerade für ein Strahlenbündel von parallel verlaufenden Geraden. Die genauen Ausmaße einer solchen Fläche, die durch eine Gerade repräsentiert wird, hatten die Mädchen zwar nicht spezifiziert, aber das Ziel, welches sie mit dieser Überlegung verfolgten, war es, den Tumor in seinem gesamten Ausmaß mit den Strahlen zu erreichen und auf diese Weise zu zerstören. Dieses wäre mit einzelnen geradenförmigen Strahlen nicht möglich, zumindest nicht in einer für den Patienten zumutbaren Zeit.

Um das Problem nicht zu komplex zu gestalten, einigten sich die Mädchen auf eine Anzahl von vier Strahlen, mit denen der Patient bestrahlt werden sollte. Die Regenerationszeit von gesundem Gewebe wurde aufgrund mangelnder Informationen nicht beachtet. Die Problemlösung erfolgte beispielhaft, und zwar anhand des speziellen Falls eines Lungenkarzinoms (siehe Abbildung 16).

Zudem hatte die Gruppe zwar implizit die Annahme getroffen, die Intensität der Strahlung würde beim Eindringen in das Körpergewebe abnehmen, allerdings hatte sie diesen Aspekt aus Gründen der Vereinfachung bei ihren Überlegungen nicht berücksichtigt.

Die Schülerinnen sind davon ausgegangen, dass der Tumor bei einer Dosis von 40-70 Gray zerstört wird. Da sich die Strahlungsintensität an der Überlappung der Strahlen erhöht, sollten nur Schnittpunkte innerhalb des Tumors zugelassen werden, um lediglich im erkrankten Gewebe eine zerstörende Wirkung zu erzielen.

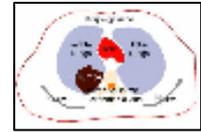
Eine Lösung für das Bestrahlungsproblem haben die Mädchen auf eine eher zeichnerische Weise gefunden. Über den Querschnitt des Körpers (siehe Grafik 5) haben sie ein Koordinatensystem gelegt, dessen Ursprung im Tumor liegt. Für die vier Strahlen haben sie nun folgende Geradengleichungen angegeben:

Analytische Geometrie:

$$\text{Strahl 1: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot a$$

Analysis:

$$\text{Strahl 1: } x = 0$$



$$\text{Strahl 2: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a$$

$$\text{Strahl 2: } y = x$$

$$\text{Strahl 3: } \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot a$$

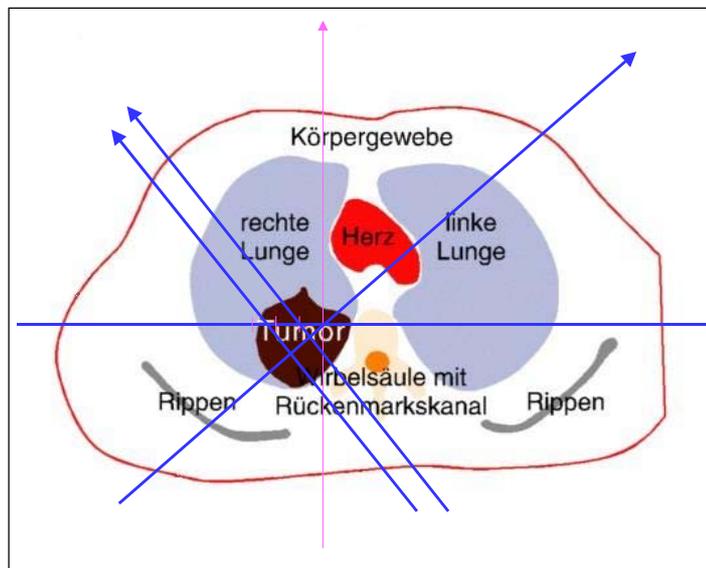
$$\text{Strahl 3: } y = -x - 2,5$$

$$\text{Strahl 4: } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot a$$

$$\text{Strahl 4: } y = -x - 1$$

Dieses Ergebnis haben sie im Anschluss grafisch dargestellt (siehe Abbildung 17).

**Abbildung 17: Bestrahlungsplan des Tumors**



Die blauen Pfeile repräsentieren die Strahlen, die rosafarbenen spannen das Koordinatensystem im  $\mathbb{R}^2$  auf, dessen Ursprung im Tumor liegt.

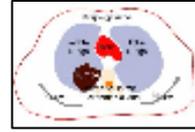
Dabei hat sich die Gruppe bei der Wahl der Bestrahlungsrichtungen zum großen Teil an der Lage der Risikoorgane orientiert. Ihre Entscheidung begründet sie unter Einbeziehen der Toleranzdosen für gesundes Gewebe (Abbildung 15). Die Lunge ist zwar relativ strahlungsempfindlich, denn bereits bei einer Dosis von 30 Gray besteht ein Schadensrisiko von 50 Prozent, jedoch lässt sich die Bestrahlung

dieses Organs aufgrund der Lage des Tumors nicht vermeiden.

Da das Schadensrisiko beim Herzen nicht so hoch ist - erst im Bereich von 40 bis 58 Gray besteht die Gefahr einer 5- bis 50-prozentigen Schädigung - verläuft ein Strahl durch das Herz. Dies hat zusätzlich den Vorteil, dass dieses Organ die Intensität des Strahls abmindert, bevor dieser die linke Lunge erreicht.

Das Rückenmark kann aufgrund seiner Lage sowie seiner geringen Größe gemieden werden.

Eine Bestrahlung der Haut lässt sich nicht vermeiden, allerdings ist ihre Toleranzdosis von 57 bis 70 Gray auch relativ hoch.



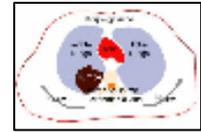
Da bei Knochen die Dosismenge für ein 5- bis 50-prozentiges Schadensrisiko gemäß der vorliegenden Tabelle (Abbildung 15) am geringsten ist - diese Gefahr besteht nämlich erst bei einer Energiedosis von 60 bis 105 Gray -, verläuft ein Strahl durch die Rippen. Dadurch wird zudem das Ziel erreicht, das Lungenkarzinom von möglichst vielen Seiten zu bestrahlen, um so eine möglichst hohe Anzahl an Überlappungsstellen der Strahlen zu erhalten.

Die Wahl der Geraden hat sich zudem daraus ergeben, dass es möglichst viele Schnittpunkte im Tumor selbst geben sollte und eine Überschneidung der Strahlen im umliegenden Gewebe vermieden werden sollte. Zu diesem Zweck haben die Schülerinnen die beiden Geraden, welche sich nicht im Ursprung des Koordinatensystems mit den anderen schneiden, parallel zueinander verlaufen lassen. Dadurch wollten die Mädchen zusätzlich erreichen, dass eine möglichst große Fläche des Tumors mit den 4 Strahlen getroffen wird, vor allem, da sie ja von 'flächigen' Strahlen ausgingen, auch wenn sie diese Überlegung nicht konkretisiert haben.

Insgesamt hat die Gruppe zwar eine Lösung präsentieren können, jedoch ist diese nur für ein spezifisches Beispiel erstellt worden. Nach ihrer Festlegung auf vier Strahler wurden die Richtungen lediglich durch Ausprobieren und Zeichnen gefunden. Die Schülerinnen verständigten sich zwar darauf, den Patienten pro Sitzung mit 2 Gray zu bestrahlen, bis der Tumor - bei einer Dosis von 40 bis 70 Gray - zerstört ist, aber es wurde keine Gewichtung der Strahlenintensitäten vorgenommen. Da hierzu nicht einmal Überlegungen angestellt wurden, muss man davon ausgehen, dass die Gruppe von einer gleichmäßigen Verteilung der Energiedosis auf die vier Richtungen ausgegangen ist.

Nachdem sich die dritte Gruppe mit der Präsentation auseinandergesetzt hatte, begann sie damit, sich das Problem anhand einer Zeichnung zu veranschaulichen. Dabei haben die Schülerinnen und Schüler zunächst einen menschlichen Körper in der Draufsicht und dann im Profil gezeichnet. Da dieses sich nicht als hilfreich herausstellte, haben sie schließlich einen Kreis skizziert, um eine vereinfachte Schnittaufnahme eines Menschen zu erhalten. In diesen Kreis haben die Schüler einen punktförmigen Tumor und das Herz als Beispiel für ein Risikoorgan eingezeichnet und nach ein paar Erwägungen den Entschluss gefasst, strahlungsempfindliche Organe sollten bei der Bestrahlung ganz ausgespart werden.

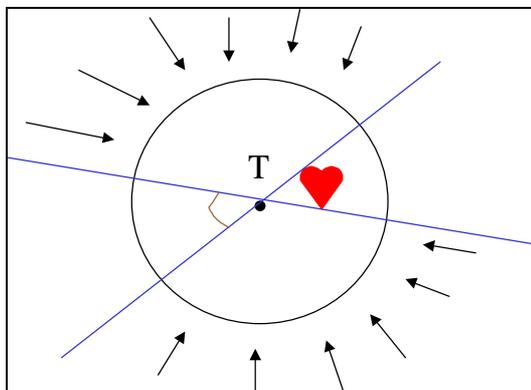
Im Anschluss haben sich die Schülerinnen und Schüler überlegt, dass ein Teil der Strahlung durch das Körpergewebe absorbiert werden müsste. Daher sollte die Bestrahlungsdosis höher sein als die Solldosis im Zielvolumen. Da sie keine Angaben zum Maß der Abschwächung der Strahlung hatten, haben sie die



Annahme getroffen, dass 1 Gray pro Zentimeter Körpertiefe verloren geht, und zwar unabhängig von der Gewebestruktur. Ausgehend vom Beispiel eines punktförmigen Tumors, der im Mittelpunkt eines Kreises von 2 Zentimetern Radius liegt, müsste man diesen 'Körper' mit einer Dosis von 3 Gray aus jeder Richtung bestrahlen, damit 1 Gray im Tumor ankommt. Die Gesamtdosis von 40 bis 70 Gray sollte dabei auf mehrere Wochen verteilt werden, um den Körper nicht zu stark zu belasten.

Nach diesen Überlegungen hat sich die Gruppe Gedanken bezüglich der Position der Strahler gemacht. Dabei hat sie zunächst ein Modell eines menschlichen

**Abbildung 18: Bestrahlung des Tumors**

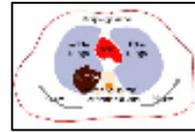


Es darf nur so bestrahlt werden, dass kein Risikoorgan getroffen wird. Die Pfeile symbolisieren hier die erlaubten Bestrahlungsrichtungen, das Herz steht stellvertretend für ein Risikoorgan.

Körpers, das keine Risikoorgane enthält, betrachtet und beschlossen, dass die Bestrahlungsrichtungen in diesem Fall frei gewählt werden könnten. Läge nun ein Risikoorgan wie das Herz in dieser Schnittaufnahme des Menschen, so dürfte aus keiner Richtung bestrahlt werden, die das Herz treffen könnte. Und da sie außerdem die Möglichkeit in Betracht gezogen haben, dass die Strahlen auch durch den Tumor hindurch gehen könnten, dürfte folglich auch nicht aus der entgegengesetzten Richtung bestrahlt werden (Abbildung 18).

Aus Gründen der Vereinfachung sind die Schüler nun davon ausgegangen, dass die Strahlen geradenförmig sind, also nicht streuen oder reflektiert werden. In der Folge haben sie beratschlagt, ob sie das Problem im zwei- oder im dreidimensionalen Raum betrachten wollen. Um die Aufgabe nicht zu kompliziert zu gestalten, einigten sie sich darauf, den Körper weiterhin in Schichtaufnahmen zu betrachten und die Strahlen als Geraden in der gleichen Ebene aufzufassen.

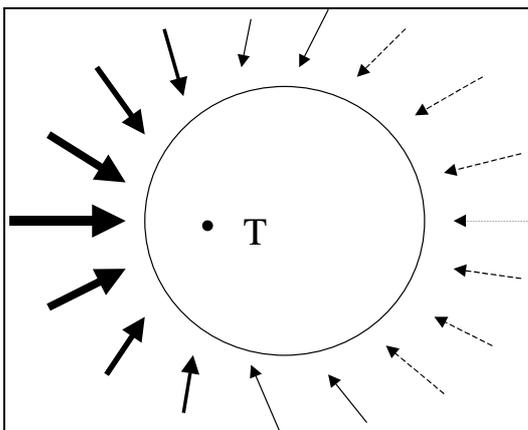
Danach begannen sie, ihr Modell zu erweitern. Sie machten sich Gedanken, was bei einem Tumor geschehen müsse, der größer als ein Punkt ist. Dies erwies sich als problematisch, da sie sich auf geradenförmige, nicht streuende Strahlen geeinigt hatten. Dieses hätte zur Folge, dass nur die Tumorzellen bestrahlt würden, welche auf einer jener Geraden liegen. Ihren Überlegungen nach müsste aber eine Dosis von 40 bis 70 Gray an jedem Punkt im Tumor erreicht werden, damit dieser vollständig vernichtet wird. Da dieses Problem für die Gruppe nicht lösbar war, haben sie sich für eine isozentrische Bestrahlung entschieden und als Ziel formuliert, die Solldosis müsse lediglich in diesem



Mittelpunkt des Tumors erreicht werden und sich als Summe der Einzeldosen aus den verschiedenen Richtungen ergeben. Dabei hat sich eine Diskussion darüber entsponnen, wie das Zentrum zu definieren sei, da man von einem unregelmäßig geformten Tumor ausgehen müsste. Die Gruppe hat sich dabei für den Schwerpunkt entschieden, da dieser den Massenmittelpunkt repräsentiert.

Nachdem die Tabelle mit den Toleranzdosen der verschiedenen Organe (Abbildung 15) von der ersten Gruppe zur Verfügung gestellt worden war, haben die vier Schüler ihre ursprüngliche Zielsetzung modifiziert. Statt die Risikoorgane völlig auszusparen, sollten diese nun auch bestrahlt werden dürfen, aber maximal bis zu der Dosismenge, bei der ein Schadensrisiko von fünf Prozent besteht. Damit sollte bezweckt werden, dass gesundes Gewebe nicht zu sehr geschädigt wird und sich zudem eine größere Anzahl an möglichen Bestrahlungsrichtungen ergibt. Auf Basis dieser Überlegung haben sie aus der Tabelle der Toleranzdosen (Abbildung 15) geschlossen, dass die Strahler

**Abbildung 19: Gewichtung der Strahlen**



Gewichtung der Strahlungsrichtungen nach dem Kriterium des kürzesten Weges. Je dicker ein Pfeil ist, desto mehr sollte die zugehörige Einstrahlrichtung bevorzugt werden.

gesundes Gewebe geschädigt wird.

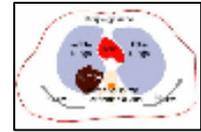
In ihrem Ergebnis hat die Gruppe als Ziel formuliert, die Bestrahlungsrichtungen sollten so gewählt werden, dass der Weg der Strahlen durch den Körper möglichst kurz ist. Dabei sollen die Risikoorgane so wenig wie möglich belastet werden und daher maximal mit einer Dosis bestrahlt werden, bei der ein fünfprozentiges Schadensrisiko besteht.

Sie haben die folgenden Annahmen getroffen:

- Die Absorption der Strahlung erfolgt auf eine lineare Weise, und zwar geht 1 Gray pro Zentimeter Körpergewebe verloren.

beliebig positioniert werden könnten, lediglich das Knochenmark sollte gemieden werden. Die Voraussetzung hierfür sei, dass aus jeder Richtung nur einmal bestrahlt wird und die Einzeldosis 2 Gray beträgt.

Aufgrund der Abschwächung, welche die Strahlen durch das Körpergewebe erfahren, sollte ein möglichst kurzer Weg der Strahlen durch den Körper gewählt werden (siehe Abbildung 19). Dieses hätte den Vorteil, dass eine größtmögliche Strahlungsintensität im Tumor erzielt und zusätzlich möglichst wenig

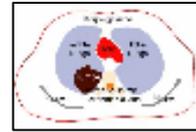


- Diese Abschwächung ist unabhängig von der Struktur des Gewebes.
- Daraus folgt, dass die Strahlung durch den Tumor hindurch geht.
- Die Bestrahlung ist aus allen Richtungen möglich. Zudem kann eine beliebig hohe Anzahl an Einstrahlrichtungen gewählt werden.
- Um das Problem lösbar zu machen, haben sie zusätzlich Vereinfachungen vorgenommen:
- Die Strahlen sind als Geraden aufzufassen, das heißt die Strahlung wird nicht reflektiert oder gestreut.
- Sowohl der menschliche Körper als auch die Strahlen werden im  $IR^2$  betrachtet.
- Die Strahlen sind isozentrisch ausgerichtet. Sie schneiden sich im Schwerpunkt des Tumors und nur an dieser Überlappungsstelle muss die Solldosis von 40 bis 70 Gray erreicht werden. Diese ergibt sich als Summe der Einzeldosen, mit denen das Krebsgeschwulst aus den verschiedenen Richtungen bestrahlt wird.
- Der Patient ist absolut unbeweglich. Minimale Bewegungen, die trotz Fixierung seines Körpers auftreten könnten, werden ausgeschlossen.

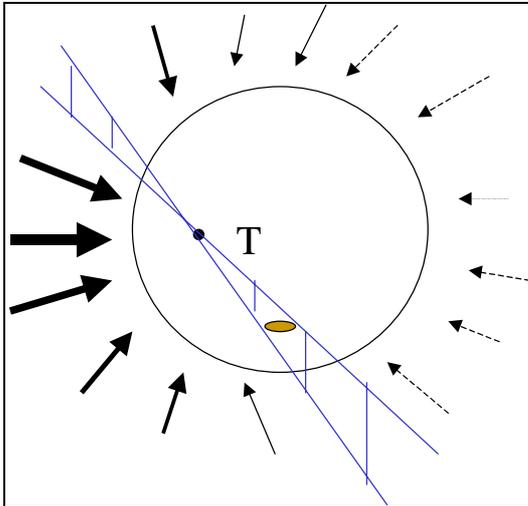
Die Gruppe hat festgelegt, dass der Körper aus jeder einzelnen Richtung lediglich mit einer Dosis von 2 Gray bestrahlt werden soll. Dies begründet sie damit, dass auf diese Weise das umliegende Gewebe nur gering belastet wird und zusätzlich an keiner Stelle das Schadensrisiko über der selbst definierten Grenze von fünf Prozent liegt (siehe Grafik 4). Nur das Knochenmark soll aufgrund seiner extremen Strahlenempfindlichkeit gemieden werden.

Als Kriterium für die Bestimmung der Bestrahlungsrichtungen dient dabei die Länge des Weges von der Hautoberfläche bis zum Zentrum des Tumors. Diese Strecke soll minimal gewählt werden und daraus ergibt sich bereits die Position des ersten Strahlers. Die Gruppe geht bei ihrer Lösung davon aus, dass es nun beliebig viele Einstrahlrichtungen geben kann. Diese liegen alle in der Nähe des ersten Strahls, orientieren sich also auch an der Länge des Weges durch den Körper (siehe Abbildung 20).

Unter Einbeziehen der Abminderung der Strahlungsintensität wird also so lange und aus so vielen verschiedenen Richtungen mit einer Dosis von 2 Gray bestrahlt, bis die Solldosis von 40 bis 70 Gray im Zentrum des Tumors erreicht ist.



**Abbildung 20: Orientierung für die Bestrahlungsplanung**



Grafik 9.: Der dickste Pfeil zeigt die erste Strahlenrichtung an, bei welcher der kürzeste Weg durch das Körpergewebe zurückgelegt wird. In geringem Abstand werden nun jeweils weitere Strahler positioniert. Die Pfeildicke gibt hierbei die Priorität für die Richtungswahl an. Der schraffierte Bereich soll ausgespart werden, um zu verhindern, dass das Knochenmark (braun) durch die Strahlen getroffen wird.

Als Gegeben setzen wir voraus, dass die Solldosis im Zielvolumen (SD) bekannt ist, genauso wie die Toleranzdosen (TD) von gesundem Gewebe und Risikoorganen.

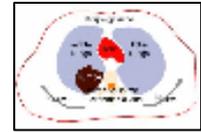
Wir nehmen in unserem Modell folgende Vereinfachungen vor:

- Wir gehen von einer isozentrischen Bestrahlung aus und wählen dabei als Zentrum  $Z(x_z/y_z)$  den Schwerpunkt des Tumors, da dieser den Massenmittelpunkt darstellt.
- Die Solldosis im Zielvolumen ist in an dieser Überlappungsstelle der Strahlen zu erreichen. Sie ergibt sich als Summe der Dosen  $D_z$ . Damit sind die Dosismengen gemeint, welche aus den verschiedenen Bestrahlungsrichtungen ( $x_i$ ) im Krebsgeschwulst ankommen.
- Die Strahlen sind geradenförmig, es findet also keine Streuung oder Reflexion statt.
- Wir behandeln das Problem im  $IR^2$ . Der menschliche Körper wird in Schnittaufnahmen betrachtet und die Strahlen werden als Geraden in derselben Ebene aufgefasst.

Auf diese Weise hat die Gruppe letztlich Regeln für eine Bestrahlung aufgestellt. Dabei hat sie sich nicht wie die anderen Gruppen an einem spezifischen Beispiel orientiert, sondern das Problem modellhaft und allgemein betrachtet.

### 5.3.2. Weiterführende Ideen der Studierenden

Die Zielsetzung der Studierenden bestand darin, dass gesundes Körpergewebe durch die Bestrahlung nur minimal belastet werden soll, und zwar in Relation zu den vorgegebenen Toleranzdosen. Konkret heißt dies, dass gesundes Gewebe maximal mit der zulässigen Toleranzdosis bestrahlt werden darf. Hierbei soll allerdings angestrebt werden, diese Dosis so weit wie möglich zu unterschreiten.



Und wir gehen von den folgenden Annahmen aus:

- Die Anzahl  $n$  der Bestrahlungsrichtungen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ist vorgegeben.
- Für jeden Punkt  $P(x/y)$  einer Schnittaufnahme des Körpers ist die Toleranzdosis  $TD(x/y)$  bekannt. Diese wird jedem Pixel gemäß seiner Zugehörigkeit zu einem bestimmten Organ oder Gewebe zugeordnet. Dies lässt sich durch Einscannen des Bildes erreichen. Anschließend wird ein zweidimensionales Koordinatensystem über den Körperrausschnitt gelegt, so dass jedem Punkt spezifische Koordinaten zugeordnet werden können. Die einzelnen Punkte haben dabei beispielsweise einen Abstand von 0,01mm zueinander, und zwar gilt dies in beiden Achsenrichtungen. So ergibt sich eine endliche Anzahl von Punkten, die zu betrachten sind.
- Die Abschwächung der Strahlung durch das Körpergewebe erfolgt linear, dabei schließen wir eine Abminderung der Strahlen außerhalb des Körpers aus. Wir gehen davon aus, dass 1% der Dosis pro Zentimeter Körpertiefe ( $d$ ) absorbiert wird, und zwar geschieht dies unabhängig von der Gewebestruktur.

Die Abnahmerate  $A$  errechnet sich dann folgendermaßen:

$$A = \frac{1\%}{\text{cm}} * d[\text{cm}] = d\% = \frac{d}{100}$$

Die im Zentrum des Tumors aus einer Richtung  $x_i$  ankommende Dosis  $D_{iZ}$  erhält man dann durch:

$$D_{iZ} = D_i * \left(1 - \frac{d_{o,i}}{100}\right)$$

$D_i$  bezeichnet dabei die Anfangsdosis, mit welcher der Tumor aus Richtung  $x_i$  bestrahlt wird. Mit  $d_{o,i}$  ist der Anstand des Tumorzentrums von der Hautoberfläche gemeint.

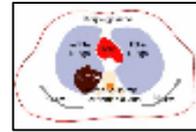
Die Anfangsdosis ermittelt man nun wie folgt:

$$D_{iZ} = D_i * \left(\frac{100 - d_{o,i}}{100}\right) \Leftrightarrow D_i = D_{iZ} * \left(\frac{100}{100 - d_{o,i}}\right)$$

Bei der Bestrahlungsplanung gehen wir nun folgendermaßen vor:

Richtungswahl: Zu Beginn werden die Richtungen bestimmt, aus denen der Tumor bestrahlt werden soll.

Hierbei werden zunächst Geradengleichungen  $f_o$  für potentielle Strahlen ermittelt:



Es werden jeweils Punkte auf der Körperoberfläche  $P_o(x_o/y_o)$  mit dem Zentrum  $Z(x_z/y_z)$  des Tumors verbunden; dadurch lassen sich Geraden konstruieren. Der Abstand zwischen diesen Punkten  $P_o$  beträgt dabei beispielsweise 0,1mm und daraus ergibt sich auch die endliche Anzahl der so entstehenden Geraden  $f_o$ . Die Geradengleichungen für  $o = 1, \dots, m$  erhält man aus:

$$\text{Steigung } m_o = \frac{y_o - y_z}{x_o - x_z} \quad \text{und } y\text{-Achsen-Abschnitt } b_o = y_o - \frac{y_o - y_z}{x_o - x_z} * x_o$$

$$\Rightarrow f_o(x) = \frac{y_o - y_z}{x_o - x_z} * (x - x_o) + y_o$$

Im Anschluss wird entlang jeder dieser  $m$  möglichen Bestrahlungsrichtungen die kleinste Toleranzdosis  $TD_{min_o}$  ermittelt, welche durch das strahlungsempfindlichste Gewebe bestimmt wird, das in dieser Strahlenrichtung auf dem Weg durch den Körper liegt:

Jedem Punkt  $P_{o,k}(x_{o,k} / y_{o,k})$  auf einer solchen Geraden  $f_o$  lässt sich laut unserer Annahme eine Toleranzdosis  $TD(x_{o,k} / y_{o,k})$  zuordnen.  $k = 1, \dots, r_o$  nummeriert hierbei die Punkte, die in einem Abstand von 0,01mm voneinander auf einer solchen Geraden  $f_o$  innerhalb des Körpers liegen. Es gilt nun, für jede der  $m$  Geraden die minimale Toleranzdosis  $TD_{min_o}$  herauszufinden.

Für  $o = 1, \dots, m$  werden jeweils folgende Schritte ausgeführt:

Schritt 0:  $TD(x_o/y_o)$  wird als Toleranzdosis von dem Eintrittspunkt des Strahls in den Körper festgehalten. Die Toleranzdosen der weiteren Punkte werden in den nächsten  $r_o$  Schritten ermittelt.

Schritte  $k = 1, \dots, r_o$ :

1.Fall: Steigung  $m_o > 0$ : Der nächste Punkt  $P_{o,k}(x_{o,k} / y_{o,k})$  ergibt sich folgendermaßen:

$$x_{o,k} = x_o + 0,01 * k$$

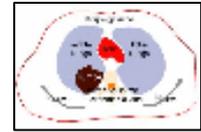
$$y_{o,k} = m_o * x_{o,k} + b_o$$

$$= \frac{y_o - y_z}{x_o - x_z} * (x_o + 0,01 * k - x_o) + y_o$$

$$= \frac{y_o - y_z}{x_o - x_z} * 0,01 * k + y_o$$

2.Fall: Steigung  $m_o < 0$ : Dann erhält man den nächsten Punkt  $P_{o,k}(x_{o,k} / y_{o,k})$  durch:

$$x_{o,k} = x_o - 0,01 * k$$



$y_{0,k}$  ermittelt man analog wie beim ersten Fall, also:  $y_{0,k} = \frac{y_o - y_z}{x_o - x_z} * (-0,01) * k + y_o$

Den so erhalten Punkten müssen nun noch die entsprechenden Toleranzdosen  $TD(x_{o,k} / y_{o,k})$  zugeordnet werden, über die dann das Minimum  $TDmin_o$  gebildet wird:

$$TDmin_o := \min ( TD(x_{o,k} / y_{o,k}) ) \quad \text{für } k = 1, \dots, r_o \quad \text{und } o = 1, \dots, m$$

Zusammen mit jedem dieser  $m$  Toleranzdosenminima wird jeweils der Punkt  $P_{o,k}(x_{o,k} / y_{o,k})$  gespeichert, an dem dieser Wert gemessen wurde. Existieren davon mehr als einer, so wird derjenige gewählt, welcher am nächsten unter der Hautoberfläche liegt, also mit dem kleinsten  $k$  benannt ist.

Anschließend werden diejenigen  $n$  Geraden ausgewählt, bei denen die minimale Toleranzdosis  $TDmin_o$  am größten ist. Dies entspricht der Zielsetzung, die zulässige Toleranzdosis so weit wie möglich unterschreiten zu wollen und so gesundes Gewebe sowie die Risikoorgane geringst möglich zu belasten:

Die  $n$  größten Toleranzdosenminima  $TD_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) werden nun folgendermaßen ermittelt:

$$TD_1 := \max ( TDmin_o ) \quad \text{für } o = 1, \dots, m$$

Dieses Maximum wird mit  $TDmin_{o,1}$  bezeichnet. Die zugehörige Gerade gibt nun die erste Einstrahlrichtung  $x_1 := f_{o,1}$  an. Gibt es mehrere Maxima, hat also mehr als ein 'Strahl' den gleichen Wert  $TD_1$ , so werden alle  $l$  zu diesen Toleranzdosen gehörigen Geraden als potentielle Strahlenrichtungen  $x_1 := f_{o,1}, \dots, x_l := f_{o,l}$  gewählt und es gilt:  $TD_1 = TD_2 = \dots = TD_l$ .

In der Folge werden die nächst größeren Toleranzdosenminima und die dazugehörigen Geraden ermittelt, und zwar solange, bis sich eine Anzahl  $i \geq n$  von ausgewählten Geraden ergibt:

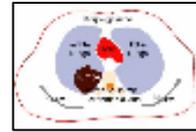
$$TD_i := \max ( TDmin_o \setminus \{ TDmin_{o,1}, \dots, TDmin_{o,i-1} \} ) \quad \text{für } o = 1, \dots, m \setminus \{ o_{o,1}, \dots, o_{o,i-1} \}$$

und  $x_i := f_{o,i}$

Zusätzlich wird jeweils der Punkt  $P_o(x_o/y_o)$  gespeichert, in dem der jeweilige Strahl auf die Hautoberfläche trifft sowie der Punkt  $P_{o,k,i}(x_{o,k,i}/y_{o,k,i})$ , in dem das jeweilige Toleranzdosenminimum  $TD_i$  gemessen wurde (siehe (1)b) ).

Ergeben sich auch bei einem dieser  $i$  Schritten mehrere Maxima, so wird wie oben beschrieben verfahren.

Nach obigen Kriterien können sich nun mehr als  $n$  Lösungen ergeben. In dem Fall wird unter den Strahlen mit dem kleinsten Minimum eine Auswahl nach der Länge des Weges durch den Körper getroffen. Die Strecke, welche die Strahlung



von der Hautoberfläche zum Zentrum des Tumors zurücklegt, soll dabei möglichst klein sein. Dadurch wird eine geringere Körpermasse der Strahlenbelastung ausgesetzt und zudem ist der Intensitätsverlust der Strahlung kleiner:

Der Abstand zwischen den jeweiligen Punkten  $P_{o,i}(x_{o,i}/y_{o,i})$ , in denen die Strahlen auf die Körperoberfläche treffen, und dem Tumorzentrum  $Z(x_z/y_z)$  muss also ermittelt werden:

$$d_{o,i}(P_{o,i}, Z) = \sqrt{(x_z - x_{o,i})^2 + (y_z - y_{o,i})^2} \quad \text{für } i = g, \dots, h, \text{ wobei } g < h \text{ und } g \leq n < h$$

Über diese Werte wird das Minimum gebildet, bis am Ende insgesamt  $n$  Geradengleichungen als Bestrahlungsrichtungen ausgewählt sind.

Dosisverteilung: Nachdem nun die Bestrahlungsrichtungen gefunden wurden, erfolgt eine Dosisverteilung auf diese  $n$  ausgewählten Richtungen. Dabei wird jeweils die niedrigste Toleranzdosis ( $TD_i$ ) auf jedem der ausgewählten Strahlen als Richtwert für die Dosis genommen, mit der aus dieser Richtung  $x_i$  bestrahlt wird. So darf in dem Punkt, in dem diese Dosis gemessen wurde, maximal der Wert von  $TD_i$  Gray ankommen. Zusätzlich soll, gemäß unserer Zielvorgabe, versucht werden, alle  $TD_i$  so weit wie möglich zu unterschreiten. Dies soll bei allen Strahlen in gleichem Maße geschehen. Da wir die Absorption der Strahlung einbeziehen müssen, gehen wir schrittweise vor:

Zunächst berechnen wir die Menge der Dosis der  $TD_i$ , welche im Zentrum ankommen würde ( $D_{i,z}$ ):

$$D_{i,z} = TD_i * \frac{100 - d_i}{100}$$

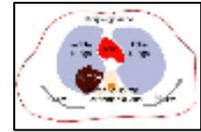
Dabei bezeichnet  $d_i$  den Abstand des Punktes  $P_{o,k,i}(x_{o,k,i}/y_{o,k,i})$ , an dem die minimale Toleranzdosis  $TD_i$  gemessen wurde, zum Zentrum  $Z(x_z/y_z)$  des Tumors:

$$d_i(P_{o,k,i}, Z) = \sqrt{(x_z - x_{o,k,i})^2 + (y_z - y_{o,k,i})^2}$$

Im Anschluss bestimmen wir, welche Dosis tatsächlich an dem jeweiligen Punkt ankommen soll, in der das jeweilige Toleranzdosisminimum gemessen wurde. Zu diesem Zweck vergleichen wir die Summe der  $D_{i,z}$  mit der Solldosis im Zielvolumen ( $SD$ ):

1. Fall: Ist  $SD > \sum_{i=1}^n D_{i,z}$ , entsteht ein Widerspruch zu unseren Zielsetzungen.

In diesem Fall muss die Anzahl an Bestrahlungsrichtungen  $i = 1, \dots, n$  auf  $n+1$  erhöht werden. Anschließend wird wieder bei Schritt (1)c) beziehungsweise (1)d) angesetzt, um die hinzugekommene Strahlenrichtung  $x_{n+1}$  zusammen mit ihrer



$TD_{n+1}$  sowie mit den Punkten  $P_o$  sowie  $P_{o,k,n+1}$  zu bestimmen. Sollte nun die Summe der im Zentrum ankommenden Dosismengen  $D_{iz}$  - welche sich an den Toleranzdosenminima orientieren - immer noch kleiner als die Solldosis sein, muss die Anzahl der Richtungen weiter erhöht werden, bis der 2. oder der 3. Fall eintritt. Bei den 3 Fällen muss dann darauf geachtet werden, dass die Anzahl der Richtungen erhöht wurde, der Laufindex  $i$  also bis zu einer Zahl geht, die größer als  $n$  ist, nämlich  $n +$  die hinzugekommene Anzahl an Richtungen.

-> weiter in Schritt (2) c) zur Berechnung der Einstrahldosen auf Basis der  $TD_i$ .

2. Fall: Ist  $SD = \sum_{i=1}^n D_{iz}$ , so haben wir die Dosisverteilung gefunden.

3. Fall: Ist  $SD < \sum_{i=1}^n D_{iz}$ , soll so bestrahlt werden, dass an den Punkten  $P_{o,k,i}$  eine geringere Dosis ankommt als die dort zulässige Toleranzdosis  $TD_i$ . Dabei sollen alle  $TD_i$  um den gleichen Betrag  $z$  unterschritten werden. Diesen Wert gilt es nun zu ermitteln, um die neuen - verminderten - Dosismengen ( $TD_{i,neu}$ ) zu erhalten, die jeweils in den Punkten  $P_{o,k,i}$  ankommen sollen:

$$TD_{i,neu} := TD_i - z$$

Von dieser Dosis kommt im Zentrum des Tumors folgende Dosismenge an:

$$D_{iz,neu} := TD_{i,neu} * \frac{100 - d_i}{100}$$

Dabei ist  $d_i$  der Abstand des Punktes  $P_{o,k,i}$ , an dem die minimale Toleranzdosis  $TD_i$  gemessen wurde, zum Zentrum  $Z$  des Tumors (siehe (2)a).

Nun berechnet sich  $z$  folgendermaßen:

$$SD = \sum D_{iz,neu}$$

$$SD = \sum TD_{i,neu} * \frac{100 - d_i}{100}$$

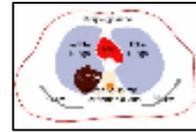
$$SD = \sum (TD_i - z) * \frac{100 - d_i}{100}$$

$$SD = \sum TD_i * \frac{100 - d_i}{100} - z * \frac{100 - d_i}{100}$$

$$SD = \sum TD_i * \frac{100 - d_i}{100} - \sum z * \frac{100 - d_i}{100}$$

$$z * \sum \frac{100 - d_i}{100} = (\sum D_{iz}) - SD$$

$$z = \frac{(\sum D_{iz}) - SD}{\sum \frac{100 - d_i}{100}}$$



Die Summe  $\sum$  wird dabei über die Werte der  $i$  verschiedenen Richtungen gebildet und geht von 1 bis zu einer Zahl größer oder gleich  $n$ , je nachdem, ob und wie viele zusätzliche Bestrahlungsrichtungen sich als Folge aus dem 1. Fall ( $SD > \sum D_{iz}$ ) ergeben haben.

Wir erhalten nun also  $TD_{i\text{neu}}$  durch:

$$TD_{i\text{ neu}} = TD_i - \frac{(\sum D_{iz}) - SD}{\sum \frac{100 - d_i}{100}}$$

Zuletzt gilt es, auf Grundlage der Werte, die in (2)b) ermittelt wurden, die Einstrahldosen  $D_i$  zu berechnen. Im vorherigen Schritt wurden die Dosen errechnet, die in den Punkten  $P_{o,k,i}$  ankommen sollen ( $TD_i$  bzw.  $TD_{i\text{neu}}$ ), so dass die in diesen Punkten gemessenen Toleranzdosenminima ( $TD_i$ ) nicht oder nur minimal überschritten werden und sich im Zentrum des Tumors genau die Solldosis als Summe der dort ankommenden  $D_{iz}$  ergibt.

Zu diesem Zweck wird zunächst der jeweilige Abstand  $d_i'$  berechnet, der durch jeden Strahl zurückgelegt wird, und zwar vom Eintreffen auf der Hautoberfläche im Punkt  $P_o(x_o/y_o)$  bis zum Erreichen des Punktes  $P_{o,k,i}(x_{o,k,i}/y_{o,k,i})$ , in dem die Messung des Toleranzdosenminimums erfolgte:

$$d_i'(P_o, P_{o, k, i}) = \sqrt{(x_o - x_{o, k, i})^2 + (y_o - y_{o, k, i})^2}$$

Zum Schluss ermittelt man die verschiedenen Dosen  $D_i$ , mit denen der menschliche Körper aus den Richtungen  $x_i$  bestrahlt werden soll. Die Grundlage hierfür bilden die Dosen  $TD_i$  bzw.  $TD_{i\text{neu}}$ , die in den Punkten  $P_{o,k,i}$  ankommen sollen. Welcher dieser beiden Werte bei der folgenden Rechnung verwendet wird, richtet sich nach den 3 Fällen aus (2)b):

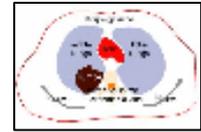
1. + 3. Fall:

$$D_i = TD_{i\text{neu}} * \frac{100}{100 - d_i'}$$

2. Fall:

$$D_i = TD_i * \frac{100}{100 - d_i'}$$

Somit hat man also sowohl die Richtungen  $x_i$  ermittelt als auch die zugehörigen Dosen  $D_i$ , mit denen der Patient aus diesen Richtungen bestrahlt werden soll.



Insgesamt zielt dieses Modell darauf ab, das gesunde Gewebe sowie die Risikoorgane so wenig wie möglich durch Strahlung zu belasten.

Als zentralen Kritikpunkt sehen wir dabei die Vereinfachung auf eine isozentrische Bestrahlung, bei der die Solldosis lediglich in dem Schnittpunkt der Strahlen erreicht werden muss. Dadurch, dass die Strahlen zudem als Geraden angesehen werden, also keine Streuung zugelassen wird, entfaltet sich die zerstörende Wirkung also nur im Zentrum des Tumors. Dies ist ein entscheidender Schwachpunkt des Modells, wenn wir dieses mit der Realität vergleichen.

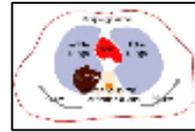
Das von uns entwickelte Modell lässt bei einigen Punkten Modifikationen zu:

Die Annahme, dass die Anzahl  $n$  der Bestrahlungsrichtungen vorgegeben ist, kann man dadurch ersetzen, dass man zunächst  $n=1$  setzt. Nun führt man die Schritte (1)a) bis (2)a) durch. In Schritt (2)b) findet ein Vergleich der Solldosis im Zielvolumen mit der Dosis  $D_{1z}$  statt. Je nachdem, welcher der drei möglichen Fälle nun eintritt, bleibt es bei  $n=1$  (Fall 2 oder 3) oder die Anzahl der Bestrahlungsrichtungen muss solange erhöht werden, bis die Summe der  $D_{1z}$  größer oder gleich der Solldosis im Zielvolumen ist (siehe Fall 1).

Die Absorption der Strahlung haben wir linear in Abhängigkeit von der Eindringtiefe der Strahlen in den Körper gewählt. Das Maß der Abschwächung von 1% pro Zentimeter Körpertiefe lässt sich durch einen realitätsnäheren Wert ersetzen. Im Rahmen unseres Modells gelingt dieses allerdings nur mit einer solchen Abnahme relativ problemlos, welche unabhängig von der Gewebestruktur ist und lediglich von der Eindringtiefe abhängt.

Die Abstände der betrachteten Punkte  $P(x/y)$  jeder Schnittaufnahme des Körpers untereinander (siehe unsere Annahmen) sowie der potentiellen Geraden  $f_0$  voneinander (siehe Schritt (1)a)) lassen sich variieren. Je nachdem, ob der Schwerpunkt auf einem möglichst präzisen Bestrahlungsplan oder auf einen nach Möglichkeit nicht zu hohen Aufwand gelegt wird, kann man die oben genannten Abstände verkleinern oder vergrößern.

Eventuell kann es sinnvoll sein, zu Beginn der Bestrahlungsplanung eine Prioritätensetzung nach medizinischen Gesichtspunkten vorzunehmen. Dieses geschieht über eine Modifikation der Toleranzdosen. Gibt es Gewebe, das beispielsweise aufgrund einer Schädigung bei der Bestrahlung vollständig gemieden werden soll, so kann die Toleranzdosis für diese Bereiche auf Null gesetzt werden. Je nachdem, wie wichtig es ist, dass bestimmte Körperareale tendenziell gemieden werden, bestimmt sich das Maß, in welchem die zugehörigen Toleranzdosen verkleinert werden. Sind bestimmte Bereiche des



Patienten besonders strahlungsunempfindlich, so lässt sich die zugehörige Toleranzdosis erhöhen.

Zu unserem Modell ließen sich noch weitere Anmerkungen machen, allerdings würde dies den Rahmen dieser Ausarbeitung sprengen. Insgesamt ließe sich nach unserer Bestrahlungsplanung ein Computerprogramm entwickeln, welches die Schritte (1)a bis (2)c durchführt und nach Eingabe der Toleranzdosen sowie der Solldosis im Zielvolumen und gegebenenfalls auch noch der Anzahl  $n$  von Bestrahlungsrichtungen diese Einstrahlrichtungen sowie die zugehörige Dosisverteilung ermittelt.

#### 5.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt

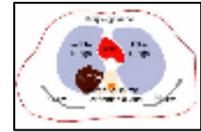
Nach den Problemen, die diese Gruppen beim Bearbeiten des Hubschrauberproblems hatten, wurde der Gesamtzyklus eher positiv bewertet. Die Schülerinnen und Schüler hoben dabei vor allem die freien Arbeitsweisen hervor, bewerteten es aber auch positiv, dass sie sich mit realen Problemen auseinandergesetzt haben und ihre Lösungen an der Realität gemessen wurden. Dies war zwar neu und somit mit Problemen behaftet, die Möglichkeit, eigene Lösungswege zu ermitteln war aber für die Gruppe eine gute Erfahrung.

Negativ bewerteten die Schülerinnen und Schüler, dass auch bei diesem Modellierungsbeispiel kaum genug Zeit vorhanden war, sich ausgiebig mit dem Problem zu befassen.

#### 5.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses

Da dieses Modellierungsbeispiel von verschiedenen unabhängig voneinander arbeitenden Gruppen bearbeitet wurde, fällt die Bewertung dieses Modellierungsprozesses relativ heterogen aus.

Die erste Gruppe, bestehend aus einer Schülerin und zwei Schülern, zeichnete sich durch viele Diskussionen aus, welche allerdings nicht unbedingt produktiv und sinnvoll waren. Hierbei war es oftmals ein Schüler, der das Recht zu urteilen für sich beanspruchte und die Beiträge der anderen beiden Mitglieder oft ignorierte. Unter anderem führte dieses dazu, dass die eigentlich leistungsstärkste Gruppe zu keinem konkreten Ergebnis kam. Es bleibt festzuhalten, dass diese Gruppe sich mangels Teamkompetenz am Finden einer Modellsituation festgebissen hat und somit den Prozess an sich gar nicht durchlaufen hat. Dafür muss man ihnen allerdings zugestehen, dass sie auf jede noch so kleine Einzelheit vorbereitet waren und das Problem tatsächlich von allen Seiten beleuchtet haben. Mit ihrem Ergebnis war diese Gruppe im Nachhinein nicht zufrieden. Sie hatten das Gefühl, sich selbst im Weg gestanden zu haben.



Die zweite Gruppe hatte es wesentlich einfacher, den Modellierungsprozess zu durchlaufen, da die drei Schülerinnen dieser Gruppe auch im Rahmen des 'normalen' Mathematikunterrichts eine Arbeitsgemeinschaft gebildet hatten. Sie waren dadurch miteinander vertraut und in ihrer Arbeitsweise aufeinander abgestimmt. Diese Gruppe zeichnete sich durch eine ausgewogene Aufgabenverteilung und eine hohe Kooperationsbereitschaft aus.

In dieser Gruppe wurden sinnvolle Vereinfachungen getroffen, wie beispielsweise die Verlagerung des Problems in den zweidimensionalen Raum und die Festlegung auf eine feste Anzahl von Bestrahlungsrichtungen. Außerdem wurde zunächst eine Lösung für ein Beispiel gesucht, um das Problem zu konkretisieren und im Anschluss leichter zu einem allgemeingültigen Ansatz kommen zu können. Leider wurde aber der Schritt der Verallgemeinerung nicht mehr vollzogen, wodurch sich die Gruppe mit ihrem beispielhaften und relativ unmathematischen Ergebnis begnügen musste.

Die vier Schüler der dritten Gruppe haben recht gleichberechtigt mit ihren Ideen zur Lösung des Modellierungsproblems beigetragen. Bei der Bearbeitung der Aufgabe sind die Schüler schrittweise vorgegangen. Sie haben das Problem zunächst stark vereinfacht, um es anschließend zu erweitern, und sie haben sich auch nicht davor geschämt, Annahmen zu treffen, wie beispielsweise bezüglich der Abnahmerate der Strahlen. Allerdings haben die Schüler ihre Lösung sehr allgemein gehalten und kaum an der Realität überprüft. So haben sich die Schüler keine Gedanken darüber gemacht, ob die hohe Anzahl an Bestrahlungsrichtungen, die sich aus ihrem Modell ergibt, überhaupt sinnvoll und machbar ist, wenn man den dadurch entstehenden Aufwand betrachtet. Die Gruppe hat also den letzten Schritt des Modellierungsprozesses, also die Rückinterpretation, nicht mehr wirklich vollführt. Dass auch in dieser Gruppe letztlich keine konkreten Berechnungen angestellt wurden, ist zum größten Teil eine Konsequenz des engen zeitlichen Rahmens, der den Schülern zur Verfügung stand.

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass der Bearbeitungsrahmen für dieses Beispiel zu gering ausgefallen ist. Mit etwas mehr Zeit wäre es durchaus möglich gewesen, dieses Projekt zu interessanten Modellierungen zu bringen.



## 6. Ausrichtung und Vergleich von Molekülen („Molecular Alignment“)

### 6.1. Zusammenfassung

Ausgangspunkte für diese Modellierungsaufgabe ist die Pharmazie. Hier wird versucht, chemische Stoffe in Wirkstoffen durch solche zu ersetzen, die preisgünstiger, wirkungsvoller oder mit weniger Nebenwirkungen behaftet sind. Dafür müssen die jeweiligen Stoffe nicht nur in ihren chemischen Eigenschaften, sondern auch in ihrer räumlichen Struktur ähnlich sein. Die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler war es nun, eine Methode zu finden, zwei gegebene Moleküle (Benzylbernsteinsäure und L-Phenyllactat, beide blockieren ein Enzym im Darmtrakt) diesbezüglich zu vergleichen.

Neben den Daten zu den Molekülen stand ein Computerprogramm zur Verfügung, das die Koordinaten der Moleküle in zwei Koordinatensystemen und Bindungslängen und -winkel lieferte.

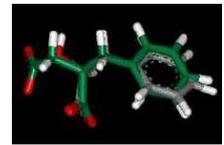
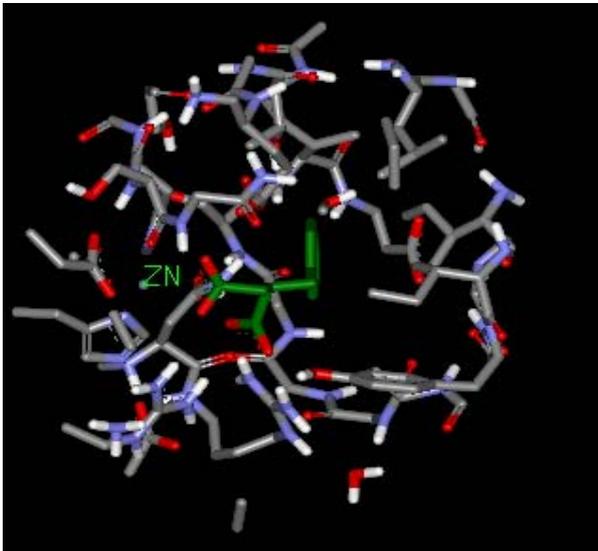
Ein Ansatz war die Erfassung der räumlichen Struktur der Moleküle durch Angabe der Koordinaten einiger Punkte des Moleküls in einem Koordinatensystem. Dieses dreidimensionale Problem sollte dann vereinfacht werden, indem man das Molekül in dünne Scheiben zerlegt, die als zweidimensionale Ebenen angenähert werden können.

Eine alternative Idee war, beide Moleküle in einem Koordinatensystem darzustellen. Anschließend werden die jeweils äquivalenten Atome in den Molekülen bestimmt und ein solches Atompaar wird durch Verschiebung eines Moleküls im Raum zur Deckung gebracht. Mit Hilfe des Computers werden dann die prozentualen Abweichungen der Koordinaten der anderen sich entsprechenden Atompaare bestimmt.

Für eine weitergehende Analyse dieses Problems bieten sich gegebenenfalls Elemente der Linearen Algebra, insbesondere Drehmatrizen und Translationen an.

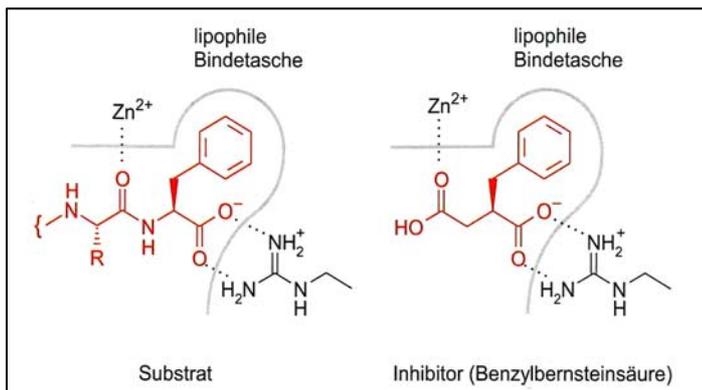
### 6.2. Problemdarstellung

In der Pharmazie werden ständig neue Wirkstoffe gesucht und gebraucht. So konzentrieren sich Forschungen beispielsweise darauf, Wirkstoffe, welche für bestimmte Eigenschaften bekannt sind, durch verwandte Stoffe zu ersetzen, die kostengünstiger sind, besser wirken oder weniger Nebenwirkungen haben. Zu diesem Zweck werden Stoffe gesucht, welche nicht nur die gleichen chemischen Eigenschaften haben beziehungsweise in ihren chemischen Gruppen übereinstimmen, sondern sich auch in der räumlichen Anordnung dieser Gruppen ähneln.

**Abbildung 21: Das Enzym Carboxypeptidase A**

Bei dem Modellierungsproblem, welches den Schülern von Herrn Mietzner vorgestellt wurde, handelt es sich um das Enzym Carboxypeptidase A, welches sich im Darmtrakt befindet und von Proteinen einzelne Aminosäuren abspaltet. In der „dreidimensionalen“ Darstellung (Abbildung 21) sieht man dieses Enzym. In Grün ist das eingelagerte Substrat eingezeichnet. Ein Wirkstoff, die Benzylbernsteinsäure, blockiert dabei die Funktion dieses Enzyms, wenn es gewünscht wird (siehe Abbildung 22).

Bei dem Modellierungsproblem, welches den Schülern von Herrn Mietzner vorgestellt wurde, handelt es sich um das Enzym Carboxypeptidase A, welches sich im Darmtrakt befindet und von Proteinen einzelne Aminosäuren abspaltet. In der „dreidimensionalen“ Darstellung (Abbildung 21) sieht man dieses Enzym. In Grün ist das eingelagerte Substrat eingezeichnet. Ein Wirkstoff, die Benzylbernsteinsäure, blockiert dabei die Funktion dieses Enzyms, wenn es gewünscht wird (siehe Abbildung 22).

**Abbildung 22: Benzylbernsteinsäure blockiert das Enzym.**

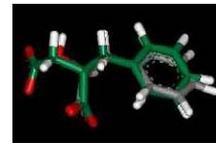
Nun ist ein anderer, besserer Wirkstoff gesucht, welcher die gleichen chemischen und physiologischen Eigenschaften hat. L-Phenyl-lactat scheint ein solcher Stoff zu sein, denn bei genauerer Betrachtung seiner chemischen und räumlichen Struktur fallen zwischen Benzylbernsteinsäure und L-Phenyl-lactat gewisse Ähnlichkeiten schon mit bloßem Augen auf, wie nebenstehendes Schaubild (Abbildung 22) verdeutlichen soll. Aufgabe der Schüler war es nun, eine Möglichkeit zu finden, diese beiden Moleküle miteinander zu vergleichen.

Nun ist ein anderer, besserer Wirkstoff gesucht, welcher die gleichen chemischen und physiologischen Eigenschaften hat. L-Phenyl-lactat scheint ein solcher Stoff zu sein, denn bei genauerer Betrachtung seiner chemischen und räumlichen Struktur fallen zwischen Benzylbernsteinsäure und L-Phenyl-lactat gewisse Ähnlichkeiten schon mit bloßem Augen auf, wie nebenstehendes Schaubild (Abbildung 22) verdeutlichen soll. Aufgabe der Schüler war es nun, eine Möglichkeit zu finden, diese beiden Moleküle miteinander zu vergleichen.

### 6.3. Problemlösungen

#### 6.3.1. Ansätze der Schülerinnen und Schüler:

Mit diesem Modellierungsproblem hat sich nur eine dreiköpfige Gruppe aus Schülerinnen und Schülern befasst. Entsprechend kurz fällt der Teil der Lösungsansätze der Schülerinnen und Schüler aus.



Als Grundlage für ihre Arbeit standen der Gruppe die Vortragsfolien von Herrn Mietzner sowie ein kleines Programm zur räumlichen Darstellung von Molekülen

**Abbildung 23: Vergleich: L-Phenyllactat und Benzylbernsteinsäure**

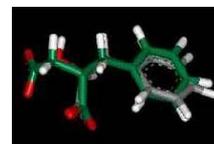


zur Verfügung. Zusätzlich wurden ihnen die Daten der zu vergleichenden Moleküle in diesem Programm zur Verfügung gestellt. Zunächst experimentierten die Schülerinnen und Schüler mit dem Programm und den zur Verfügung stehenden Daten. Das Programm lieferte neben dem dargestellten Schaubild (Abbildung 23) die Koordinaten der einzelnen Atomkerne, wenn auch in zwei

unterschiedlichen Koordinatensystemen, und konnte Bindungslängen und -winkel angeben.

Die Gruppe einigte sich relativ schnell auf die folgende Vereinfachung, welche ihnen die Arbeit erleichtern sollte. Es wurde angenommen, dass beide Moleküle eine starre Konformation haben. Dies trifft zwar in der Realität nicht zu, da beide Moleküle um einige Bindungen drehbar sind, ist aber eine gute Vereinfachung, um nicht alle Konformationen überprüfen zu müssen. Eine zweite Vereinfachung war, dass die relevanten chemischen Gruppen nicht miteinander verglichen wurden, sondern einfach nur gesagt wurde, dass sie sich sehr ähnlich wären.

Der erste Ansatz, den die Gruppe verfolgte, bestand darin, dass beide Moleküle in ihrer kompletten räumlichen Struktur miteinander verglichen werden sollten. Hierbei entwickelten sie folgende Grundidee: Als erstes müssten beide Moleküle im Koordinatensystem übereinander geschoben werden. Dies wäre immer noch ein dreidimensionales Problem. Um die Aufgabe weiter zu vereinfachen, wollten sie anschließend beide Moleküle in möglichst kleine „Scheiben“ schneiden. Diese Scheiben würden sie dann aufgrund ihrer geringen dreidimensionalen Ausdehnung als zweidimensional annehmen. Die Gruppe hatte gehofft, das Problem auf diese Weise vereinfacht zu haben. Dies wäre sicherlich eine schöne Vereinfachung gewesen (ob sie zulässig wäre, müsste dann noch geprüft werden), aber die Zerlegung der einzelnen Moleküle in Scheiben stellte die Schüler vor ein für sie technisch unlösbares Problem. Weder mit dem dargebotenen Programm zur Darstellung der Moleküle noch mit anderen Computerprogrammen, die an der Schule zur Verfügung standen, konnte diese Aufgabe weiter bearbeitet werden.



Daher verwarfen die Schüler diesen Ansatz und stellten neue Überlegungen an. Ihr neuer Ansatz bestand darin, die Lage der einzelnen Atome der Moleküle im Raum miteinander zu vergleichen. Durch Drehung eines der Moleküle sollten beide in Deckungsgleichheit gebracht werden. Als erstes wurde eines der Moleküle im Koordinatensystem verschoben, bis jeweils die obersten Wasserstoffatome der Phenylringe von den beiden Molekülen übereinander lagen. Dieses entspricht einer einfachen Translation von einem der Moleküle. Die erhaltene Differenz zwischen den übrigen Atomen wurde danach folgendermaßen nur für die Atome im Phenylring durchgerechnet: Zwei Atome, die jeweils die gleiche Stellung im Phenylring einnehmen, wurden miteinander verglichen. Dazu wurde die Differenz im Koordinatensystem in Prozent ausgedrückt. Es kam heraus, dass die einzelnen miteinander verglichenen Atome um höchstens 2% voneinander abwichen. Es wurde eine Gesamtabweichung im Phenylring von 1,8% ermittelt.

Als Hilfe zur Berechnung dieser Abweichungen wurden die Koordinaten der beiden Atome als Text-Datei exportiert - dies war mit dem zur Verfügung gestellten Programm möglich - und in das Mathematikprogramm Derive importiert, das an der Schule vorhanden war und mit dem die Schüler etwas vertraut waren. Dies erleichterte ihnen die Berechnungen.

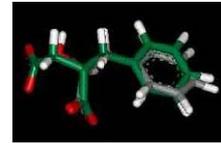
Die Gruppe selbst war nicht besonders zufrieden mit ihrer Lösung, da sie erstens noch die restlichen Moleküle miteinander hätte vergleichen müssen und ihr bewusst wurde, dass sie eines der Moleküle noch hätte drehen müssen, um eine möglichst große Übereinstimmung zu erzielen. Da den Schülern aber nur die dreidimensionale Drehmatrix um eine Achse bekannt war, nämlich die folgende Drehmatrix um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Zeit knapp wurde, ließen sie dieses Ergebnis so stehen. Lieber hätten sie das Problem anhand einer Scheibendarstellung der Moleküle bearbeitet, wie es ihr erster Ansatz gewesen war, gaben aber zu, dass sie dafür auch eine allgemeine dreidimensionale Drehmatrix benötigt hätten, um die Moleküle übereinander zu schieben.

### 6.3.2. Weiterführende Ideen eines Studierenden

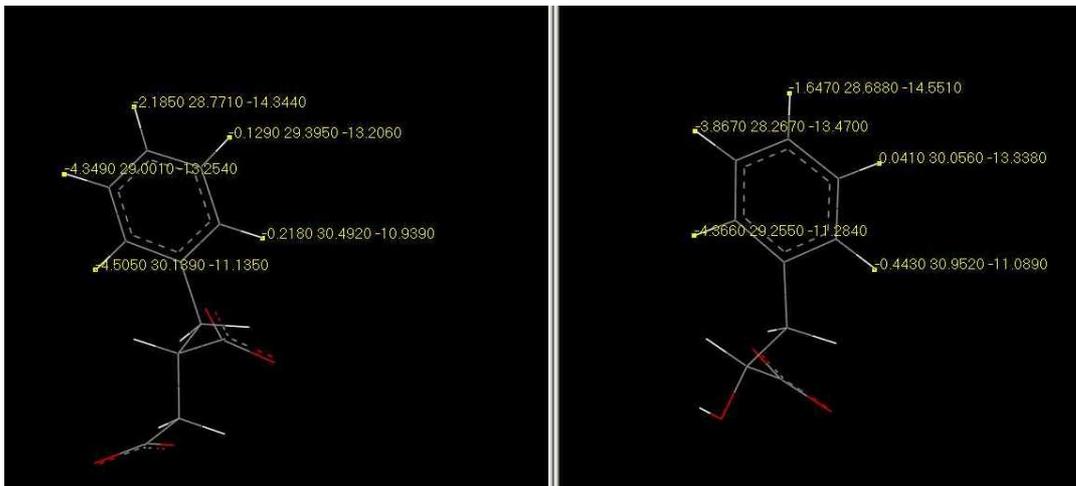
Den ersten Ansatz der Schüler halte ich für den besten oder geeignetsten, um die beiden Moleküle miteinander zu vergleichen. Da aber weder den Schülern noch mir selbst die technischen Möglichkeiten zur Verfügung stehen, Moleküle zu „zerschneiden“ und die Schnittflächen zu erhalten, werde ich hier den zweiten Ansatz der Schüler, die Lage der Atome zueinander zu vergleichen, fortführen



beziehungsweise näher beleuchten. Hierbei treffe ich die einschränkende Annahme, dass die Ausdehnung der Atom- und Molekülorbitale nicht von den unterschiedlichen funktionellen Gruppen der Moleküle beeinflusst wird, da sonst der Vergleich der Atommittelpunkte keinen Sinn ergeben würde. Dies ist zwar grundsätzlich falsch, aber in Anbetracht der Komplexität des Problems meiner Meinung nach eine zulässige Vereinfachung. Auch die Vereinfachung einer starren Konformation der Moleküle sei wiederum vorausgesetzt.

Da die beiden Moleküle in Grafik 13 in zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen vorlagen, welche allerdings gleich skaliert waren, standen die Schüler vor dem Problem, die beiden Moleküle in größtmögliche Übereinstimmung zu bringen.

**Abbildung 24:** Darstellung der zu vergleichenden Moleküle



Grafik 13: Darstellung der zu vergleichenden Moleküle in dem von Herrn Mietzner zur Verfügung gestellten Programm. Die Wasserstoffatome der Phenylringe sind hier mit Koordinaten versehen.

Um dies zu erreichen, verwendeten sie im ersten Schritt eine Translation des einen Moleküls auf das andere. Hierzu wurden zwei Referenzatome herangezogen, die miteinander in Deckungsgleichheit gebracht werden sollten. Diese Funktion sollten die oberen Wasserstoffatome (siehe Abbildung 24) übernehmen.

Daraus ergeben sich folgende Probleme:

Der Maßstab in den beiden Darstellungen könnte unterschiedlich sein. Es stellte sich allerdings durch den Vergleich verschiedener Bindungslängen miteinander heraus, dass dies nicht der Fall ist. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Die Moleküle sind nicht nur versetzt zueinander eingezeichnet, sondern auch verdreht.



Es werden sich aufgrund der unterschiedlichen Bindungslängen in den beiden Molekülen keine zwei Atome in Deckungsgleichheit bringen lassen, da es sich um zwei zwar ähnliche, aber dennoch nicht gleiche Moleküle handelt.

Wie wird die Lage von zwei Atomen im Raum miteinander verglichen? Diese Frage stellt sich, obwohl hier die Annahme getroffen wurde, dass nur die Atommittelpunkte miteinander verglichen werden sollten. Und wie wird die Abweichung in Prozent ausgedrückt?

Das erste Problem wurde bereits dadurch gelöst dass der Fall hier nicht zutrifft. Bei dem zweiten Problem ist eine längere Erklärung erforderlich:

Um eine Drehung eines der Moleküle zu vollziehen, sind Drehwinkel und Drehachse erforderlich. Beide sind nicht gegeben. Ich habe dabei keine Möglichkeit gefunden, die Drehachse herauszubekommen. Um einen Winkel zu erhalten, können zwei Vektoren miteinander verglichen werden. Dazu wird ein euklidischer Vektorraum benötigt, wie es der  $\mathbb{R}^3$  glücklicherweise ist. In einem euklidischen Vektorraum heißt

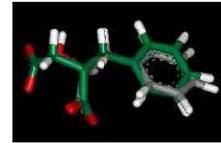
$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

der Betrag von  $v$  oder auch euklidische Norm, wobei  $\langle v, v \rangle$  das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selber ist. Diese Norm wird bei folgender Formel zur Berechnung eines Winkels zwischen zwei Vektoren  $v, w$  benötigt:

$$\alpha(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}, \text{ mit } v, w \neq 0.$$

Werden aus Vereinfachungsgründen die beiden Moleküle mit dem deckungsgleichen Wasserstoffatom in den Ursprung verschoben, was eine weitere Translation bedeutet, ließen sich zwischen allen zu vergleichenden Atomen, das heißt zwischen den Atomen in gleicher Position in den beiden Molekülen, jeweils die Winkel berechnen. Hierbei werden die Punkte der Atommittelpunkte als Vektoren aufgefasst.

Auch diese Betrachtung hilft noch nicht weiter, sondern führt in eine Sackgasse, da dieser Winkel nicht näher bestimmt ist. Um ein Molekül beliebig zu drehen, sind aber drei einzelne Drehungen um die x-, y- und z-Achse nötig. Beispielhaft sei hier die Drehung um den Winkel  $\alpha$  um die x-Achse mithilfe einer Drehmatrix  $D$  genannt:



$$D_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Stellt man diese Drehmatrix auch für die Drehung um die y- und z-Achse auf und verknüpft beide miteinander, erhält man folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} D_x(\alpha) \cdot D_y(\beta) \cdot D_z(\gamma) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta & -\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta & \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta & -\sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta & -\cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \gamma \cdot \sin \beta & \cos \gamma \cdot \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quelle: <http://www.oih.rwth-aachen.de/~bruno/formelsammlung/k10.html> (Stand: 22.10.2002)

Es sind also drei Winkel notwendig, um eine beliebige Drehung im  $\mathbb{R}^3$  durchführen zu können. Da ich aber nicht über die Kenntnisse verfüge, wie diese drei Winkel aus den gegebenen Zahlen berechnet werden könnten, sei hier der weitere Lösungsweg lediglich skizziert.

Die Idee ist, für je zwei zu vergleichende Atome diese drei Winkel zu berechnen und von diesen Winkeln in der jeweiligen Drehrichtung um x-, y- und z-Achse die Mittelwerte zu bilden und im Anschluss eines der Moleküle um diese Winkel zu drehen. Hierbei wäre dann die Drehrichtung zu beachten.

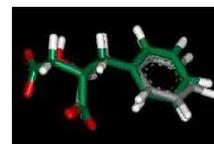
Ist eines der Moleküle gedreht, ist auch das dritte Problem so weit als möglich gelöst, da nun die Moleküle durch die Drehung um den jeweilig gemittelten Winkel in größtmögliche Übereinstimmung gebracht worden sind.

Dies führt zur letzten Aufgabe, die Abweichung zu errechnen. Als erstes Hilfsmittel soll der Abstand zwischen zwei Punkten dienen, denn

$$\|x - y\|$$

beschreibt im euklidischen Vektorraum die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten  $x$  und  $y$ .

Zuletzt sollte nun die Abweichung in Prozent angegeben werden, was mich vor ein Problem stellt, von dem ich nicht weiß, wie die Schüler es gelöst haben. Denn betrachtet man den Abstand, erhält man lediglich eine Zahl, aber keinen Wert, der als Bezugsgröße für prozentuale Abweichung herangezogen könnte. Also worauf soll der errechnete Abstand bezogen werden, um eine prozentuale



Abweichung angeben zu können? Diese Frage muss unbeantwortet hier stehen gelassen werden.

#### 6.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt

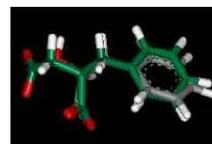
Die Schülerinnen und Schüler die an diesem Projekt teilgenommen haben waren zuerst einmal mit ihrem Ergebnis unzufrieden. Sie hatten nicht das Gefühl eine adäquate Lösung, geschweige denn einen Ansatz für eine solche Lösung gefunden zu haben. Trotzdem gab es auch positive Rückmeldungen. So empfanden es die Schülerinnen und Schüler als gut, dass sie frei arbeiten konnten, dass sie sich mit einem realen Problem befasst haben und dass es galt für sie völlig neue Wege zu gehen.

Unzufrieden waren die Gruppe mit dem abgesteckten zeitlichen Rahmen. Durch die zwei Modellierungsbeispiele, die in einem Schuljahr bearbeitet wurde und die Maßgabe eine Präsentation über beide Beispiele zu erarbeiten blieb nach der Einarbeitung in die Probleme kaum Zeit für den eigentlichen Modellierungsprozess.

#### 6.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses

Dieses Modellierungsbeispiel erscheint für den Mathematikunterricht eher wenig geeignet zu sein. Zwar haben die Schülerinnen und Schüler mit dem Computer gearbeitet und haben sich diverse Gedanken über die Moleküle gemacht, problematisch ist aber, dass den Schülerinnen und Schülern, wie aus der Studierendenlösung deutlich wird, nicht genügend Fachwissen zur Verfügung stand um die Modellierungsaufgabe zu bewältigen. Dabei erscheint es unmöglich das fehlende Fachwissen in der für das Projekt zur Verfügung stehenden Zeit zu erarbeiten, zumal auch bei diesem Beispiel zu berücksichtigen ist, dass wie bei den anderen Beispielen des zweiten Durchlaufs kaum genügend Zeit zur Modellierung zur Verfügung stand.

Ein zweiter problematischer Punkt ist die benötigte Software. Zwar wurde ein Programm zur dreidimensionalen Darstellung von Molekülen mitgeliefert, dieses Programm bot aber nicht die Möglichkeiten die zur befriedigenden Bearbeitung des Problems nötig gewesen wären. Entsprechende Software mag zwar auf dem Markt vorhanden sein. Es entspricht aber nicht dem Grundgedanken des Seminars davon auszugehen, die Schülerinnen und Schüler könnten sich diese beschaffen und auch, wenn dies möglich wäre, so ist es kaum möglich sich in der kurzen Zeit entsprechend in diese Software einzuarbeiten.



Letztlich lässt sich aber auch für dieses Beispiel feststellen, dass schon die Offenheit der Aufgabe, die Art zu arbeiten und das neue Aufgabenformat von den Schülerinnen und Schülern positiv aufgenommen wurde.



## 7. Fingerprints

### 7.1. Zusammenfassung

Diese Modellierungsaufgabe stammt aus dem Bereich der Biometrie. Es ging um die Frage, inwieweit ein Fingerabdruck als Passwortsatz verwendet werden kann. Für die Durchführung dieses Projektes standen Fingerabdruckscanner zur Verfügung, mit denen ein Fingerabdruck eingelesen und gespeichert werden konnte. Weiterhin stand er damit als Bild auf dem Computer zur Verfügung.

Ein erstes Problem bei der Bearbeitung dieser Frage ist, dass ein Fingerabdruck desselben Fingers jedes Mal anders aussehen kann; das kann an minimalen Verschmutzungen des Fingers liegen, aber auch daran, in welcher Position und mit welchem Druck man den Finger auf den Scanner legt.

Für die Lösung des Problems orientierten sich viele Schülerinnen und Schüler an charakteristischen Merkmalen eines Fingerabdrucks, den sogenannten Minutien. Weiterhin wurde sich oft mit den Grundlagen der digitalen Speicherung von Bildern befasst; diese liegen als endliche Menge diskreter Werte vor, den sogenannten Pixeln. Der verwendete Scanner lieferte ein Bild mit 300 x 300 Pixeln. Viele Lösungsversuche begannen dann mit der Bearbeitung der Bilder. Dafür wurden verschiedene Filter entwickelt, mit deren Hilfe man das Bild in ein reines Schwarz-Weiß-Bild umwandeln kann oder alle Linien auf eine Pixelbreite dünn macht (Skelettbild). Zur Realisierung der Filter wurde der Computer verwendet, insbesondere bot sich das Programm MATLAB an, das ein Bild aus 300 x 300 Pixeln als eine 300 x 300 Matrix bearbeiten kann.

Weiterhin wurde versucht, durch Punkte, die durch Minutien festgelegt wurden, ein Polynom zu interpolieren, das dann als Vergleichskriterium dienen sollte. Ähnlich war der Ansatz, die Linien des Fingerabdrucks selber als Graphen einer Funktion anzusehen und diese oder charakteristische Elemente der Funktionen zu vergleichen (beispielsweise die Scheitelpunkte einer Parabel).

Ein anderer Ansatz war die Möglichkeit, zwei sich entsprechende Punkte in beiden Fingerabdrücken zu suchen und zu prüfen, ob spezielle Kenngrößen wie der Abstand zwischen ihnen in beiden Bildern gleich sind.

Eine andere Gruppe hat versucht, die Bilder durch Rotation zur Deckung zu bringen. Generell lassen sich in diese Fragestellung auch geometrische Aspekte integrieren, so haben einige Schülerinnen und Schüler zum Beispiel aus mehreren durch Minutien festgelegten Punkten geometrische Gebilde konstruiert und damit versucht, die Aufgabe zu lösen.



## 7.2. Problemdarstellung

Die zentrale Frage in dieser Modellierungsrunde war, ob und wie Fingerabdrücke als Kennwortsatz zur Authentifizierung von Personen eingesetzt werden können. Das Thema ist der Biometrie zuzuordnen, also der Wissenschaft, die sowohl dynamische als auch statische Methoden nutzt, um einen Menschen anhand seiner Persönlichkeitsmerkmale zu identifizieren. Zu den dynamischen Merkmalen gehören z.B. die Unterschrift oder die Gangart eines Menschen. Zu den statischen gehört neben Iris- und Retinaabtastung auch die Erkennung durch den Fingerabdruck einer Person. Biometrische Merkmale sind vorteilhaft, da sie ungemein fälschungssicher und vor allem nicht wie Kennwörter erpressbar sind.

Für die Authentifizierung durch einen Fingerabdruck muss ein Fingerabdruck durch einen Scanner eingelesen werden und mit den Abdrücken einer Datenbank verglichen werden. Um mit dem Bild des Fingerabdrucks, das der Fingerabdruckscanner vom Finger gemacht hat, weiter arbeiten und ihn schließlich erkennen lassen zu können, muss der Fingerabdruck zunächst digital aufgearbeitet werden. Für die Projektgruppen wurden Fingerabdruckscanner angeschafft, die Bilder des Fingers auf dem Computer erzeugen können.

Die offensichtliche Problematik liegt darin, dass ein Bildvergleich stattfinden muss, wobei die Bilder durchaus recht unterschiedlich ausfallen können, obwohl sie von ein und demselben Finger stammen (siehe z.B. Abbildung 25).



**Abbildung 25: Zwei Abdruckbilder ein und desselben Fingers**

Die Gründe für diese Unterschiede sind zum Teil naheliegend:

1. **Druck:** Da der Finger von einer menschlichen Hand gescannt wird, muss davon ausgegangen werden, dass der Finger bei den verschiedenen Scans mit unterschiedlichem Druck auf die Glasoberfläche des Scanners gepresst wird. Dies bewirkt große Unterschiede in der Helligkeit der



Bilder, da die Rillen bei größerem Druck breiter sind und damit dichter beieinander liegen, und das Bild dann dunkler erscheinen lässt.

2. **Verschmutzung:** Der Finger oder der Scanner könnten verunreinigt sein, so dass das Bild zwangsläufig Veränderungen aufweist. Selbst Schweiß oder Staub können relativ große Störungen in der Erhebung des Bildes verursachen, da die bildlich zu erfassenden Merkmale von sehr geringer Größe sind.
3. **Relative Lage:** Beim Scannen des Fingerabdrucks kann der Bildbereich verdreht oder verschoben sein. Damit stimmt jeweils nur eine Teilmenge der Bilddaten der beiden Scans überein, und dieser könnte zusätzlich noch um einen bestimmten Winkel rotiert vorliegen.

Diese drei erschwerenden Problembereiche machen hoffentlich deutlich, dass auch hier ein sehr komplexes Feld für eine mathematische Modellierung dargeboten wird.

Die Bildbearbeitung wird sicherlich einen Schwerpunkt bilden, um dieses Problem lösen zu können.

### 7.3. Problemlösungen

#### 7.3.1. Ansätze der Schülerinnen und Schüler

Das Thema war in diesem Durchlauf des Projektes für alle vier teilnehmenden Gruppen obligatorisch. In allen Gruppen mussten stets die Grundlagen der Bildbearbeitung erarbeitet werden. Der Einführungsvortrag von Herrn Scholz von der Firma Phillips ging bereits intensiv auf Ergebnisse in diesem Arbeitsbereich ein. So wurde der Ansatz über die sogenannten Minutien (Endungen und Gabelungen der Rillen) vorgestellt, der somit nur auf dem Vergleich der charakteristischen Punkte und nicht der Gesamtheit der Punkte beruht. Darüber hinaus wurde die technische Seite dargestellt. Die Bilder, die der Scanner von den Fingern erzeugt, wurden an den Computer übermittelt. Ein digitales Bild stellt eine endliche Menge diskreter Werte dar, die als Pixel bezeichnet werden. In diesem Fall betrug die Anzahl der Pixel  $300 \times 300$ . Jedem Pixel wird ein Wert aus der Menge  $R = \{0, 1, \dots, 2^{m-1}\}$  zugewiesen, wobei  $m$  die Anzahl der Farben repräsentiert. Typisch ist eine Farbpalette von 256 Graustufen, wobei 255 weiß und 0 schwarz vertritt. Mathematisch kann man ein Bild als Zuordnung von zwei Variablen aus  $M \times N$  in die Menge  $R$  ansehen. Dieses Bild kann also als  $m \times n$  - Matrix aufgefasst werden, wobei die Einträge der Matrix der Farbe der Pixel an der Stelle entsprechen. Mit Hilfe von Matrizen Transformationen können nun



bildbearbeitungstechnische Operationen wie Aufhellen, Verdunkeln oder Kontrastveränderung vorgenommen werden:

$$\begin{array}{l} \text{Aufhellen } (c>0) \\ \text{Verdunkeln } (c<0) \end{array} \quad T : G \rightarrow G; \quad g \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } g + c < 0 \\ 255 & \text{falls } g + c > 255 \\ g + c & \text{sonst} \end{cases}$$

Kontrastveränderung

$$r > 1 \text{ Erhöhung} \quad T : G \rightarrow G; \quad g \mapsto r \cdot g$$

$r < 1$  Verringerung

Außerdem wurden Transformationstechniken zur Erzeugung von Schwarz-Weiß-Bildern und weitere Skelettierungstechniken erarbeitet, in denen die Minutien am Besten erkannt werden könnten. Skelette sind dabei SW-Bilder, in denen die Rillen nur noch die Breite von einem Pixel aufweisen.

#### 7.3.1.1 Gymnasium Tonndorf

Da das Niveau des Vortrages für die Schülerinnen und Schüler zu hoch war, haben diese die Informationen in den ersten Unterrichtsstunden vorerst außer Acht gelassen und den Fingerabdruck und dessen Merkmale mit bloßem Auge betrachtet und beschrieben. Außerdem wurde versucht, die Wiedererkennung von zwei Fingerabdrücken mit dem bloßen Auge zu systematisieren, wobei auf Strukturen wie die Minutien eingegangen wurde.

Als die Schülerinnen und Schüler später ihre eigenen Fingerabdrücke eingescannt und mit herkömmlichen Bildbearbeitungsprogrammen bearbeitet hatten, sahen die Studierenden es an der Zeit, die Schülerinnen und Schüler in die Programmiersprache MATLAB einzuführen, um eine mathematische Auseinandersetzung zu ermöglichen. Beim Bearbeiten der Bilder mit gängiger Bildbearbeitungssoftware lassen sich die Prozesse nicht nachvollziehen, sondern nur die Ergebnisse betrachten. So wurde in MATLAB auch gezeigt, wie man ein Bild als  $300 \times 300$  Matrix darstellt, wobei jeder einzelne Eintrag für jeweils einen Pixel des Bildes steht, und die Zahlenwerte von 0 bis 255 die Graustufen der Pixel beschreiben. Nach diesen von den Studierenden angeleiteten Stunden begann der wirkliche Modellierungsprozess der Schülerinnen und Schüler: Sie haben an den oben genannten Problemen Fehlerbearbeitung, Schwarz-Weiß-Reduzierung und Skelettierung mittels MATLAB gearbeitet; ihre eigenen Programme überprüft und verbessert. Zu einem endgültigen aussagekräftigen Vergleich zweier Fingerabdrücke ist es allerdings nicht gekommen.



### 7.3.1.1.1 Gruppe 1

Der erste von den Schülerinnen und Schülern vorgestellte Lösungsansatz bestand aus der Grundidee, mit Hilfe von Funktionen charakteristische Punkte zu überprüfen. Dabei bestand das erste Problem darin, die charakteristischen Punkte zu erkennen. Dieses Problem wurde nicht automatisiert. Ausgehend von den Punkten wurden diese verbunden, so dass eine geometrische Figur entsteht (siehe Abbildung 26). Somit können die Fingerabdrücke auf Übereinstimmung überprüft werden, auch wenn Verschiebungen vorliegen sollten. Rotationen wurden in der Lösungsvariante nicht berücksichtigt. Auch die Frage der Eindeutigkeit der entstandenen geometrischen Figuren wurde nicht diskutiert. Dennoch ist diese Idee eine erste, wenn auch einfache, Modellierung des Problems.

Eine weitere Überlegung in der Gruppe war die Beschreibung der Linien des Fingerabdrucks durch Funktionsgraphen. Damit wäre das Bild eines Fingerabdrucks eine Ansammlung von Graphen von Funktionen. Für diese Idee wurde versucht, an Beispielabdrücken bekannte Funktionen zu verwenden, um die Linien zu beschreiben.

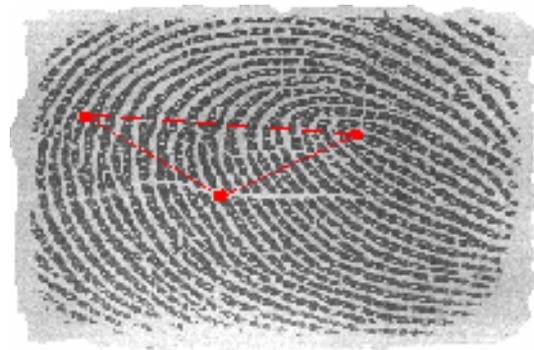


Abbildung 26: Figur im Fingerabdruck

### 7.3.1.1.2 Gruppe 2

In der zweiten Gruppe war die Leitidee die Bildung von Minutienpaaren. Damit stießen Schülerinnen und Schüler auf die Problematik, dass die Minutien lokalisiert werden mussten, was im Rahmen dieses Projektes nicht automatisiert geschehen konnte. Nach dem Auffinden sollten die Abstände aller möglichen

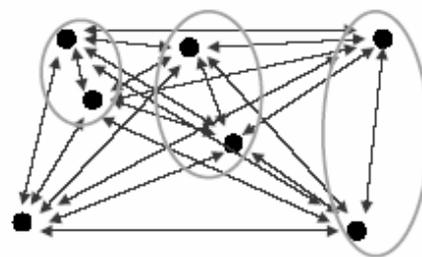


Abbildung 27: Paare von Minutien

Zweierkombinationen der Minutien ermittelt werden. Anschließend sollten Paare nach der Reihenfolge der Größe ihrer Abstände gebildet werden (siehe Abbildung 27). Damit bildeten die beiden dichtesten, die beiden zweitdichtesten Minutien usw. ein Paar. Die Abstände wurden in einem  $n$ -Tupel gespeichert und sollten mit dem  $n$ -Tupel der Abdruckvorlage verglichen werden. Bei dem Vergleich müssen die Abstände übereinstimmen.



### 7.3.1.1.3 Gemeinsame Problembereiche

Bei beiden Gruppen war das Aufarbeiten der Bilddateien ein vordergründiges Problem. Wie in dem Eingangsvortrag berichtet, müssen die Bilder zunächst bearbeitet werden, bevor man mit diesen etwas anfangen kann.

Zum einen wurde klar, dass die Farbpalette von 256 Grautönen zu groß ist, um sie bei einem Vergleich berücksichtigen zu können. Deshalb wurde die Idee einer Schwarz-Weiß-Konvertierung herangezogen. Bei dieser Reduzierung sollten bezüglich eines normativ festgesetzten Grenzwertes die Farbwerte auf 0 (schwarz) abgerundet, oder auf 255 (weiß) aufgerundet werden. Dabei entstand ein reines S/W-Bild, wobei einige Linienverläufe durch weiße Störungen unterbrochen wurden (siehe z.B. in der Abbildung 28 im Bereich unten links).



Abbildung 28: S/W-Konvertierung

Somit wurde im Bereich der Fehlerbehebung weiter gearbeitet, um mögliche Störungen wieder oder überhaupt zu beheben. Hierbei sind zunächst offensichtliche Fehler, bei denen ein weißer Punkt von schwarzen komplett eingeschlossen ist, behoben worden, indem sie durch schwarze Punkte ersetzt wurden (siehe Abbildung 29). Weitere Fehlerbehebungen wurden erst mal nicht erarbeitet.



Abbildung 29: Fehlerbehebung

### 7.3.1.1.4 Ausblick

Die Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums Tonndorf hatten in Aussicht gestellt, an einigen Themen weiterzuarbeiten. Dabei wollten sie sich bei beiden Ideen um eine Weiterentwicklung der Methodik kümmern. Bei der Gruppe 1 wäre das das Auffinden von Merkmalen und das Bilden der Funktionen. Bei der Gruppe 2 wäre das ein Bild, in dem ausschließlich die Minutien zu sehen sind, so dass die Abstände zwischen diesen Punkten gemessen werden können.

Leider existiert für die weitere Auswertung kein Bericht über die Ergebnisse dieser Gruppe, so dass an dieser Stelle über keine weiteren Lösungen berichtet werden kann.



### 7.3.1.2 Emil-Krause-Gymnasium

Am Emil-Krause-Gymnasium haben beide Leistungskurse Mathematik an dem Projekt teilgenommen, so dass sich die vier Studierenden je zu zweit auf die beiden Kurse aufgeteilt hatten. Zu Beginn des Projektes in der Schule wurden die beiden Kurse zusammengeschlossen, um gemeinsam das Problem zu besprechen und erste Ideen zu sammeln. Anschließend haben sich die beiden Kurse wieder getrennt und an unterschiedlichen Ansätzen weiter gearbeitet.

#### 7.3.1.2.1 Leistungskurs 1

Ähnlich wie bei der Gruppe am Gymnasium Tonndorf hatte auch dieser Leistungskurs die Idee, die Linien der eingescannten Fingerabdrücke als Graphen von Funktionen aufzufassen, die „nur noch“ bestimmt werden müssten. Rotation und Verschiebung wurden zunächst komplett ausgeklammert. Die erste Übung bestand darin, dass die zwölf Schülerinnen und Schüler ihren eigenen Fingerabdruck wiederfinden sollten.

Im Klassengespräch wurde entschieden, dass der Nullpunkt des Koordinatensystems in der linken unteren Ecke festgelegt werden soll. Anschließend wurde an Beispiellinien das Beschreiben der Linien durch Funktionen ausprobiert. Später sollten dann alle Linien eines Abdruckes in einem Computerprogramm berücksichtigt werden. Zunächst ging es jedoch erst einmal darum, einen Ansatz zu bekommen. Für die meisten Schülerinnen und Schüler blieb es bei einer Interpolation der Funktion anhand von drei Stützpunkten (Polynom zweiten Grades). Die Wahl der Stützpunkte wurde bei unzureichender Übereinstimmung von Funktionsgraph und Abdrucklinie wiederholt. Die Funktion wurde durch die Stützpunkte mit Hilfe von DERIVE ermittelt, da Schülerinnen und Schüler das Programm aus dem Unterricht kannten.

Anschließend entstanden zwei neue Ideen, um verdrehte und verschobene Fingerabdrücke miteinander vergleichen zu können. Die Vorgehensweise der einen Gruppe war, einen Fingerabdruck von einem gedrehten oder auch verschobenen (im Folgenden wird zur Vereinfachung nur von dem zweiten Fingerabdruck gesprochen) dadurch zu unterscheiden, dass von dem nicht gedrehten Fingerabdruck (nachfolgend bezeichnet als erster Fingerabdruck) eine Linie ausgewählt wurde und diese bei dem zweiten Fingerabdruck wieder gefunden werden sollte. Die beiden Linien wurden als Graphen einer Funktion aufgefasst. Präsentierte der Verlauf einer der beiden Graphen das Schaubild einer Relation (also keine Funktion), so hatten die Schülerinnen und Schüler die Idee, den Definitionsbereich so einzuschränken, dass sie diesen Graphen wieder als Graphen einer Funktion auffassen konnten. Die Funktionsvorschrift für den ersten Graphen wurde idealisiert als Parabel approximiert. Von dieser Parabel wurden dann zwei Punkte ausgewählt, mit denen sich im Anschluss anhand



eines Gleichungssystems und unter Verwendung von DERIVE die Funktionsvorschrift bestimmen ließ. Der Computer würde hierbei zufällig die zwei Punkte auswählen. Dieser Prozess konnte jedoch nicht automatisiert werden. Deshalb suchten sich die Schülerinnen und Schüler eigenhändig zwei Punkte aus, mit denen sie dann weiterarbeiten konnten.

Nachdem ihnen nun der Funktionsterm bekannt war, entwickelten sie ein praktisches Verfahren, bei dem sich der erste Graph mit einem zweiten sicher vergleichen ließe. Dazu stellten sie drei Kriterien für den ersten Graphen auf, die dann bei einem Graphen wieder gefunden werden sollten.

Bei dem ersten Graphen wurden die zwei Punkte (im nachfolgenden bezeichnet mit  $P(x_1; y_1)$  und  $Q(x_2; y_2)$ ) betrachtet, die schon zum Aufstellen der Funktionsgleichung ausgewählt wurden.

#### Kriterien für Übereinstimmung:

- Erstes Kriterium ist die Steigungsdifferenz  $d$  der beiden Punkte  $P$  und  $Q$ :  
 $d = f'(x_1) - f'(x_2)$
- Zweites Kriterium ist der kürzeste Abstand  $g$  (also eine Gerade) zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$ :  $g = ((x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2)^{1/2}$
- Zur Sicherheit wurde noch ein drittes Kriterium verwendet, nämlich die Bogenlänge  $b$  der Kurve von  $P$  nach  $Q$ , welche dann quasi als „Prüfgröße“

die letzte Gewissheit über die Gleichheit verschafft:  $b = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + (f'(x))^2\right)^{1/2} dx$ .

Der Computer würde dann bei der Identifizierung die beiden Abdrücke miteinander vergleichen, indem alle Linien des zweiten Fingerabdruckes zu Graphen verwandelt und zu diesen Graphen Funktionsvorschriften berechnet würden, so dass sich die Graphen darauf hin untersuchen ließen, ob sie die Punkte  $P$  und  $Q$  (natürlich mit anderen Koordinaten) besäßen, also die oben genannten drei Kriterien erfüllt würden. Die drei Kriterien (Bedingungen) liefern ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und mit  $x_1$  und  $x_2$  sowie  $y_1$  und  $y_2$  als Unbekannten. Ist dieses Gleichungssystem lösbar, handelt es sich um die zwei gesuchten Punkte und der erste Fingerabdruck wäre mit dem zweiten identisch.

Da dieser Prozess ebenfalls nicht komplett automatisiert werden konnte, haben die Schülerinnen und Schüler diesen Identifizierungsprozess anhand eines konkreten Beispiels exemplarisch durchgeführt und für gut befunden.

Zum Schluss machten sich die Lernenden Gedanken darüber, wie sich so ein Verfahren oder ein mögliches Programm verbessern lassen könnte. Bei diesem Verfahren sollten die Linien durch Polynome approximiert werden, um eine höhere Genauigkeit zu erreichen. Das Programm, welches den Vergleich



durchführt, sollte auch nicht mit exakten  $d$ ,  $g$  und  $b$  rechnen, sondern gewisse Abweichungen tolerieren, da sich die beiden Abdrücke bekanntermaßen trotz Gleichheit in ihrem Bild unterscheiden könnten. Da beim Aufstellen von Funktionsvorschriften auch häufig der Definitionsbereich eingeschränkt werden muss, sollte besser mit Relationen gearbeitet werden, da sonst die zwei Punkte möglicherweise außerhalb des Definitionsbereiches liegen könnten und dann nicht lokalisierbar wären.

Die andere Gruppe, bestehend aus sechs Leuten, hatte die Idee, einen Graphen in winzigen Schritten um den Ursprung zu drehen. Irgendwann sollte man dann per Auge erkennen, ob zwei Fingerabdrücke verschieden oder gleich sind. Sollte letzteres der Fall sein, bräuchte man den Fingerabdruck nur noch zu verschieben, und die Funktionsvorschriften sollten identisch sein.

Bei der Rotation hatte die Gruppe ein paar Anfangsschwierigkeiten. Sie wussten nicht, wie sich die Funktionsvorschrift ändert, wenn man sie z.B. um  $1^\circ$  dreht. Dann kamen sie auf die Idee, erst einmal einen Punkt um den Ursprung zu drehen. Von dem zu drehenden Punkt waren die Koordinaten und der Winkel, um den gedreht werden soll, bekannt. Anhand der Koordinaten wurde die Hypotenuse, die gleichzeitig den Radius darstellt, durch den Satz des Pythagoras berechnet. Mit Hilfe des Winkels wurden dann die Koordinaten des neuen Punktes ermittelt.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler sich damit vertraut gemacht hatten, war es für sie auch kein Problem mehr, Punkte um andere Koordinaten als den Ursprung zu drehen. Anhand der neu berechneten Punkte konnten sie nach ihrem alten Verfahren wieder mit Hilfe von DERIVE den Funktionsterm berechnen. Schließlich blieb noch das Problem der Verschiebung.

Für eine Verschiebung in der Horizontalen wurde eine Konstante hinzugefügt. War der Graph vertikal verschoben, musste jedes  $x$  der Funktionsvorschrift mit einem festen Wert erweitert werden.

Die theoretischen Überlegungen waren zwar brauchbar, bei der Umsetzung traten jedoch starke Probleme auf, so dass es nicht gelungen ist, zwei identische, leicht verdrehte Fingerabdrücke durch das entwickelte Konzept wieder zu erkennen. An dieser Stelle endete das Projekt, so dass weitere Zeit fehlte, um über die Ergebnisse zu reflektieren und neue Ideen zur Verbesserung zu finden.

#### 7.3.1.2.2 Leistungskurs 2

Zu Beginn des Projektes wurde das Thema „Erkennen von Fingerabdrücken“ im Unterricht erneut vorgestellt, da der Vortrag von Herrn Scholze schon etwas länger zurücklag. Die Schülerinnen und Schüler scannten danach jeder ihren



eigenen Fingerabdruck ein und druckten diesen aus. Anhand dieser Vorlagen verglichen sie untereinander ihre Fingerabdrücke und beschrieben deutlich sichtbare Unterschiede. Als Hausaufgabe sollten sich alle eine Linie des Fingerabdruckes herausnehmen und versuchen, diese als Funktion zu bestimmen und ein Stundenprotokoll schreiben. Diese Form entspricht also einer etwas stärkeren Lenkung durch die Lehrenden. Damit wurden die Schülerinnen und Schüler gewissermaßen in eine bestimmte Problemlöserichtung „gepresst“.

Die Hausaufgaben wurden von ungefähr vier Schülern gemacht, wobei nur zwei ein Protokoll geschrieben hatten. Die Schwierigkeit beschrieben sie darin, dass sie nicht wussten:

- Wohin sollen wir das Koordinatenkreuz setzen?
- Sollen nur positive Werte genommen werden?
- Der Abdruck muss immer genau gleich liegen.

Da diese Probleme aufgetreten waren, suchten die Schülerinnen und Schüler nach anderen Möglichkeiten als dem Vergleich durch Funktionen. Außerdem wurde darüber diskutiert, was passiert, wenn sich der Fingerabdruck durch eine Verletzung verändert oder der Finger einfach nur dreckig oder nass ist. Vielleicht verändert sich der Fingerabdruck sogar mit dem Alter.

Die nächsten Ideen waren:

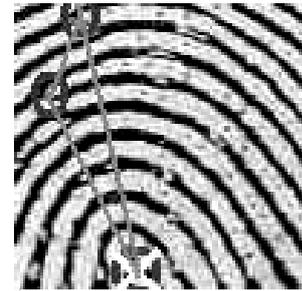
- eine dreidimensionale Betrachtungsweise,
- Minutien zu vergleichen,
- die Abstände zwischen „waagerechten Linien“ zu messen.

Die erste, vielleicht in Zukunft mögliche Methode, verwarfen die Lernenden sofort wieder, da sie in diesem Projekt technisch (Scanner) auf den zweidimensionalen Raum eingeschränkt waren.

Die anderen beiden Ideen verfolgten die Schülerinnen und Schüler in mehreren Kleingruppen interessiert weiter, wobei zusammen festgelegt wurde, dass zunächst nur mit den zwanzig zu Beginn eingescannten Fingerabdrücken weitergearbeitet werden sollte.

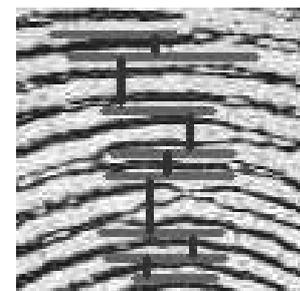


Bei der ersten Idee wurden von den Schülerinnen und Schülern eine gewisse Anzahl von Minutien herausgesucht, welche dann als Punkte dargestellt und durch Linien verbunden wurden (siehe Abbildung 30). Die hieraus entstandene geometrische Form sollte zudem noch einen noch nicht weiter spezifizierten Startpunkt bzw. Fixpunkt haben (z.B. in einem Wirbel), um den die geometrische Form später rotiert werden kann, damit auch „verdrehte“ Fingerabdrücke wiedererkannt werden können. Durch die geometrische Form ergaben sich bestimmte Größen (Länge der Minutienabstände und Winkel), welche bei gleichen Abdrücken identisch sein sollten.



**Abbildung 30:**  
**Geometrische Form durch Minutien**

Bei dem zweiten Ansatz war die Idee der Schülerinnen und Schüler, dass eine bestimmte Anzahl an waagerechten Linien bestimmt und deren Abstände zueinander gemessen werden sollten. Die waagerechten Linien sind – stellt man sich die Linien der Fingerabdrücke vereinfacht als Polynom zweiten Grades vor – im Scheitelpunkt der jeweiligen Parabel zu finden. Durch den Vergleich dieser Abstände sollte erkannt werden, ob es sich um den identischen Fingerabdruck handelt (siehe Abbildung 31).



**Abbildung 31:**  
**Abstände zwischen Scheitelpunkten**

Bei dem Versuch, diese Ideen zu verwirklichen, wurde den Schülerinnen und Schülern klar, dass sie zunächst die Bilder der Fingerabdrücke bearbeiten und verändern mussten, da folgende Probleme auftraten:

- die Linien des Fingerabdruckes sind oft unterschiedlich dick,
- das Bild war häufig sehr undeutlich,
- wie viele Minutien sollen ausgewählt werden?
- wie erhält man die Waagerechten?

In dieser Phase wurde das Programm MATLAB eingeführt. Die Installation des Programms verlief schleppend, weil nur der Administrator der Schule ein neues Programm installieren konnte und die meisten Rechner entweder zu wenig Speicherplatz hatten oder nicht mit einem CD-ROM-Laufwerk ausgestattet waren. Aus diesem Grund standen lediglich drei Rechner, an denen die Schüler mit MATLAB arbeiten konnten, zur Verfügung. Auf Grund der Rechnerkapazitäten konnte außerdem nur eine 10x10 Matrix verarbeitet werden, wobei



der komplette Fingerabdruck ja als eine 300x300 Matrix dargestellt werden sollte. Eine 10x10 Matrix ist sicherlich ein zu starke Reduzierung, wie man sich leicht vorstellen kann.

Nach der kurzen Programmeinführung ging es um das Problem der „Rauschpunkte“. Ziel war es, nur noch Pixel-Werte von 0 oder 255 (schwarze oder weiße Pixel) in der Matrix stehen zu haben, d.h. ein Schwarz-Weiß-Bild zu erzeugen. Zu diesem Zeitpunkt war das Interesse der Schülerinnen und Schüler auf einen Tiefpunkt gefallen. Es waren nur noch wenige, die wirklich an dem Thema arbeiteten und auch etwas erreichen wollten. Einige waren der Meinung das sei „Informatik und keine Mathematik“.

Nach der Zwischenpräsentation, bei der auch die Ansätze der anderen Gruppen vorgestellt wurden, schöpften die Schülerinnen und Schüler neue Motivation und haben ab diesem Zeitpunkt wieder interessierter am Thema weiter gearbeitet.

Die hauptsächlichen Bemühungen lagen nun darin, dass in dem Bild einzelne schwarze oder weiße Punkte herausgefiltert werden sollten. Außerdem wollten die Schülerinnen und Schüler es schaffen, die Linien auf eine Ein-Pixel-Breite zu reduzieren, um dadurch ein Skelett zu erhalten. Den ersten Teil haben sie auch erreicht und zusätzlich noch mit dem Grenzwert experimentiert, welcher bestimmt, ab wann ein Punkt weiß oder schwarz wird.

### 7.3.1.3 Gymnasium Lohbrügge

Der Leistungskurs Mathematik am Gymnasium Lohbrügge umfasste 15 Lernende, drei Schülerinnen und zwölf Schüler.

Zu Beginn des Projektes herrschte die Meinung vor, dass der Fingerabdruck für den Vergleich skelettiert werden müsse, um genauere Konturen zu erhalten, damit ein exakter Vergleich überhaupt möglich sei.

Die erste Problematik bestand also auch hier in der Bildbearbeitung eines Graustufenbildes in ein S/W-Bild, welches ausschließlich die Fingerabdruckslinien in schwarz darstellen sollte.

Doch zwischenzeitlich wurde der Vorschlag aus dem Vortrag aufgegriffen, die Fingerabdrücke über die charakteristischen Punkte – also den Minutien – zu vergleichen, und nicht den kompletten Skelett-Bildbereich in Form eines Rasters für den Vergleich heran zu ziehen (darauf wird später wieder eingegangen). Nach der Lokalisierung der Enden und



**Abbildung 32:**  
**Markierung der Minutien**



Verzweigungen wurden an diesen Stellen weiße Punkte eingefügt (siehe Abbildung 32). Problematisch war jedoch die Lokalisierung der Minutien. So entstanden bei jedem Scan undeutliche Stellen, bei denen nicht klar war, ob die Linie dort endete oder weiterlief. Damit war die Anzahl markanter Stellen bei verschiedenen Bildern ein und desselben Fingerabdrucks häufig nicht reproduzierbar. Somit wären unabhängig von weiteren Störungen schon an dieser Stelle die Vergleiche von Abdrücken problematisch.

Auch in Lohbrügge beschäftigten sich einige Schülerinnen und Schüler mit der Idee, ob sich die Linien im Fingerabdruck als Graphen von Funktionen beschreiben ließen. Erste Problematik war auch hier die Genauigkeit des Abdruckes. Unterbrechungen durch Ungenauigkeiten würden z.B. bewirken, dass verschiedene Funktionen zur Modellierung herangezogen werden, obwohl der Abdruck identisch sein soll. Die Wahl eines Koordinatensystems und die Problematik der relativen Lage des Abdrucks durch Veränderungen der Lage beim Scan-Vorgang haben die Schülerinnen und Schüler davon abgehalten, diesen Ansatz weiter zu verfolgen.

Also wurde wieder an dem Problemkreis „Skelettierung“ weiter gearbeitet. Ziel sollte sein, eines feines Skelett zu erzeugen. Dazu wurde über Bildfehler nachgedacht, die bei der Erzeugung des Skeletts für Ungenauigkeiten und somit zu Störungen führen würden. Anders als in den bereits vorgestellten Lösungen anderer Schulen haben die Schülerinnen und Schüler dieses Leistungskurses versucht, Bildfehler direkt im Graustufenbild zu reduzieren. Auch in diesem Kurs wurde das Programm MATLAB und die Erfassung des Abdrucks als 300x300 Matrix von den Studierenden eingeführt. Als erste mögliche Fehlerbehebung haben die Lernenden eine Methode im Internet gefunden, bei der die Pixelwerte in einem gewissen Umfeld addiert werden. Das Bild wird dabei „verwischt“, und Fehler werden reduziert. Als Umfeld eines Pixels wurden die direkten acht Nachbarpixel definiert. Einmaliges Anwenden dieses Algorithmus führt nur zu einem mäßigen Ergebnis, da nur einige Fehler aufgehoben wurde. Erst das dreimalige Ausführen führte zu einem deutlicheren Erfolg. Der Nachteil hierbei war aber die relativ hohe Rechenzeit des Computers.

Nun blieb jedoch die Frage, wie man nun ein Skelett, also eine Liniendarstellung von nur noch einem Pixel Breite, erhalten könnte. Auch hier wurde mit MATLAB an der Matrix gearbeitet und mit einem Grenzwert für die S/W-Konvertierung wie in den oben beschriebenen Gruppen experimentiert (siehe Abbildung 33).



**Abbildung 33: S/W-Konvertierung bei verschiedenen Grenzwerten**  
 [(1): 100 ; (2): 128 ; (3): 140]

Damit erhielten die Schülerinnen und Schüler jedoch lediglich ein S/W-Bild mit beliebigen Pixelbreiten, so dass nun Überlegungen angestellt wurden, wie man die Breite der Linien reduzieren könnte. Auch hier wurde wieder viel mit MATLAB herum experimentiert, bis sich zum Ende auf im Folgenden beschriebene Methode geeinigt wurde.

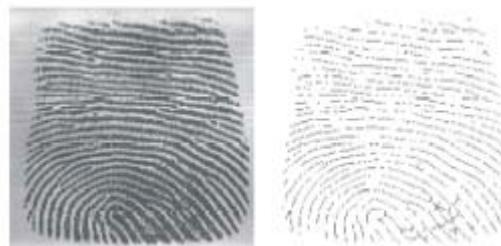
Zunächst werden einzelne komplett von schwarz eingeschlossene weiße Punkte von weiß in schwarz umgewandelt. Von nun an haben die Schülerinnen und Schüler schwarz mit 1 und weiß mit 0 codiert. Nun wurde nach Strukturen im Bild gesucht die eine Korrektur ermöglichen würden. Dazu wurden die in Abbildung 34 angeführten 3x3-Masken verwendet. Hierbei steht 0 für einen weißen Pixel, 1 für einen schwarzen

und b ist beliebig. Der Fingerabdruck wird Schritt für Schritt, d.h. Pixel für Pixel, nach diesen Masken abgesucht. Sobald das Programm eine 3x3-Struktur in dem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & b \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & b \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & b & 0 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ b & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & b \end{pmatrix}$$

Fingerabdruck findet, **Abbildung 34: 3x3-Masken für die Suche von Strukturen** die mit einer der acht

Masken übereinstimmt, ändert das Programm die Farbe des mittleren Pixels von schwarz in weiß. Dies geschieht solange, bis keine 3x3-Struktur des Fingerabdrucks mehr mit einer der Masken übereinstimmt. Das Ergebnis dieses Programms zeigt Abbildung 35. Links ist der ursprüngliche Fingerabdruck zu sehen



**Abbildung 35: Skelettierung**

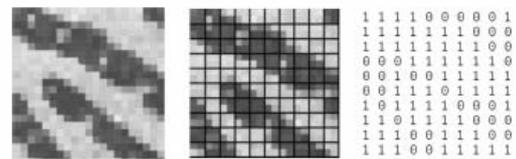


und rechts das Resultat nach Ausführen des Programms.

Die Abbildung zeigt, dass es nicht gelungen ist, ein perfektes Skelett herzustellen. Dennoch waren die Schülerinnen und Schüler und die Studierenden mit diesem Ergebnis zufrieden, da es im Vergleich zu den vorherigen Methoden eine Verbesserung darstellte.

Das oben bereits erwähnte Rastersystem war von den Schülerinnen und Schülern auf der Stufe vor der Skelettierung angedacht worden. Hierbei sollte der Fingerabdruck durch ein Rastersystem in eine Matrix transformiert werden.

Dabei sollten die Einträge gleich 1 gesetzt werden, falls eine Linie durch diesen Rasterpunkt läuft. Ohne Linie ist der Eintrag 0. Die Rasterbreite wurde dabei zunächst variabel gelassen. Abbildung 36 veranschaulicht das Verfahren an einem Ausschnitt der Größe 20x20 Pixel.



**Abbildung 36: Rastersystem**

In dem mittleren Bild wurde über den Ausschnitt ein Raster der Breite 2 Pixel gelegt. Rechts befindet sich die dazugehörige 10x10-Matrix. In der Abbildung lässt sich erkennen, dass es zum Teil nicht eindeutig ist, ob eine Linie ein Rasterfeld durchläuft oder nicht. Daher war es das nächste Ziel der Schülerinnen und Schüler, dieses Verfahren mit dem Skelett eines Fingerabdrucks durchzuführen. Das sollte eine genauere Einordnung der Rasterfelder ermöglichen. Schließlich sollten die Skelettdarstellungen zweier Fingerabdrücke anhand der zugehörigen Matrizen miteinander verglichen werden, indem ihre Einträge Position für Position miteinander verglichen werden. Ab einer gewissen Übereinstimmung sollten die Abdrücke als identisch angesehen werden. Ein Problem stellten jedoch die Ränder und die Ecken der eingelesenen Fingerabdrücke dar. Diese Bereiche variierten beim mehrmaligen Einlesen desselben Fingers am stärksten. Je nachdem, wie fest der Finger aufgedrückt wurde, entstand an den Rändern und in den Ecken der Bilddatei eine größere oder kleinere fast weiße Fläche. Daher beschränkte sich die Schülergruppe, die sich mit diesem Problem beschäftigte, darauf, nur einen Ausschnitt des Abdrucks zu betrachten. Dieser Ausschnitt sollte in der Mitte des Abdrucks gewählt werden und eine bestimmte Größe umfassen, beispielsweise 100x100 Pixel. Für diesen Ausschnitt sollte anschließend das Rastersystem angewendet werden. Für den folgenden Vergleich sollte das Skelettraster des Ausschnitts und somit auch dessen zugehörige Matrix in dem kompletten zweiten Fingerabdruck gesucht werden. Das sollte sicherstellen, dass auch eine Verschiebung mit berücksichtigt werden kann. Dabei sollte aber noch zusätzlich eine mögliche Rotation berücksichtigt werden. Diese Schwierigkeit sollte dadurch behoben werden, dass der erste Ausschnitt mehrmals rotiert wird



und daraufhin jeweils in dem zweiten Abdruck gesucht wird. Zu allen Ansätzen der Schülergruppe, die dieses Rastersystem entwickelte, muss gesagt werden, dass sie vorwiegend nur auf dem Papier entstanden und dass eine Umsetzung auf dem Computer sich als weiteres Problem herausstellen sollte. Mehrfach scheiterte die Umsetzung mit MATLAB, da es sich für die Schülerinnen und Schüler als zu schwierig erwies, ihre Ideen und Ansätze in dieser Programmiersprache umzusetzen. Zusätzlich würde diese Methode natürlich extrem viel Rechenaufwand verursachen.

### 7.3.2. Weiterführende Ideen der Studierenden

Zusätzlich zu den Lösungen der Schülerinnen und Schüler sollen in diesem Kapitel ausgewählte Ideen und Modelle der begleitenden Studierenden exemplarisch dargestellt werden. Im Rahmen des Seminars am Fachbereich Mathematik haben einige Studierende sehr detaillierte Ausarbeitungen angefertigt, die hier nur in aller Kürze umrissen werden sollen.

Die Studierenden, die am Gymnasium Lohbrügge tätig waren, haben sich über die Lösungen der Schülerinnen und Schüler hinaus tiefergehende Gedanken zu den einzelnen im Unterricht aufgetauchten Problemen gemacht und Modellierungsvorschläge produziert.

#### **Skelettierung:**

Zunächst ging es um die Erstellung eines Skeletts aus einem eingescannten Fingerabdruck. Auch bei anderen Vorgehensweisen ist die Umwandlung des Fingerabdruckbildes als Graustufenbild in ein Schwarz-Weiß-Bild nötig. Die Schülerinnen und Schüler hatten dabei ihre eigene Idee, bei der das Bild zuerst verwischt wurde und die Pixel dann auf weiß oder schwarz gesetzt wurden. Es gibt noch andere Möglichkeiten, ein Schwarz-Weiß-Bild zu erhalten. Gängige Methoden sind z.B. die „Schwellwertanalyse“ und die Umwandlung mittels „Sobel-Operator“; letzterer arbeitet auf der Basis der diskreten Approximation des Gradienten und neigt dazu, die detektierten Kanten übermäßig dick darzustellen. Ein Schwarz-Weiß-Bild eines Fingerabdrucks, der mit Hilfe der Schwellwertanalyse gefiltert wurde, zeigt



**Abbildung 37:**  
**S/W-Bild**

Abbildung 37. Wenn das Bild durch eine dieser Filterungen in eine Schwarz-Weiß-Darstellung umgewandelt wurde, ist es noch schwierig, es zur Ermittlung von z.B. Endpunkten und Abzweigungen oder zur Auswertung mit Hilfe eines Rasters heranzuziehen. Deshalb soll durch eine Skelettierung ein weiterer



Bearbeitungsschritt, und damit eine weitere Vereinfachung des Bildes geschehen. Die oft auch in der Schwarz-Weiß-Darstellung noch recht breiten Linien des Fingerabdruckes werden bei der Skelettierung in dünne, genau einen Pixel breite Linien umgewandelt. Dieser Vorgang wird auch als „Thinning“ bezeichnet. Ein möglicher Algorithmus ist der von Prof. Herbert Kopp (siehe Abbildung 38). Dabei wird über jeden Pixel iteriert und dieser gemeinsam mit seinen benachbarten Pixeln mit vorgegebenen Masken (Matrizen) verglichen. Wird eine Übereinstimmung mit einer Maske gefunden, so wird der entsprechende Pixel als Skelettpunkt markiert. Dieses Verfahren wird so lange durchgeführt, bis keine Maske mehr im Bild gefunden wird (siehe Abbildung 38). Dass der direkte Nachbar ein Hintergrundpunkt ist,

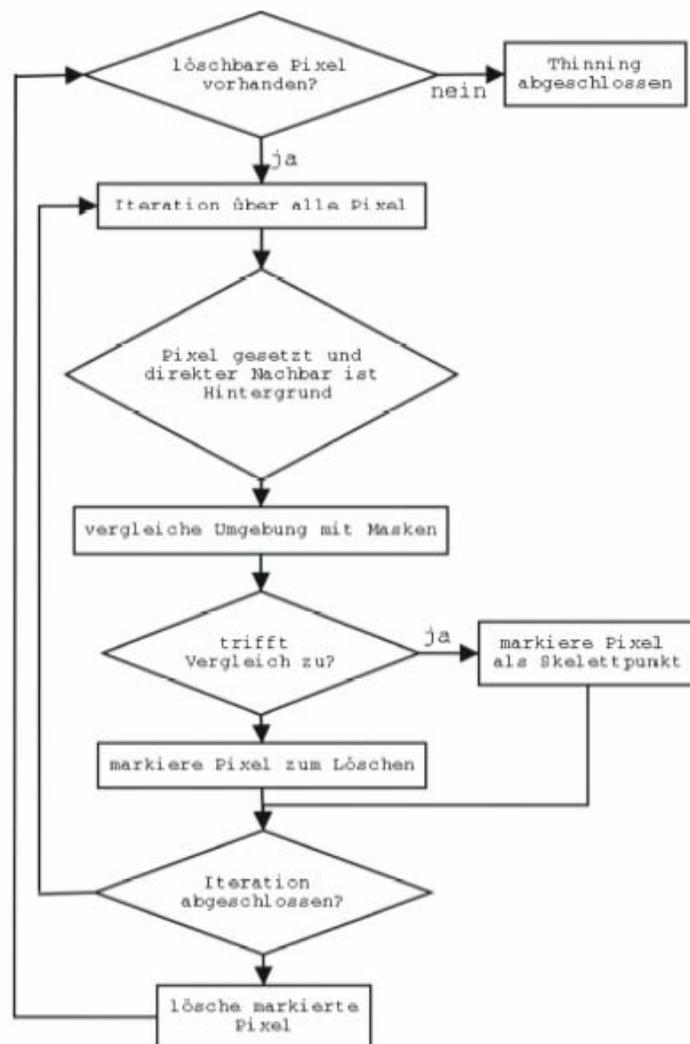


Abbildung 38: Thinning-Algorithmus (Prof. Herbert Kopp)



bedeutet, dass die benachbarten Pixel noch nicht als gesetzte Skelettpunkte oder gelöschte Pixel fungieren. Sie werden in ihrem Ausgangszustand für den aktuellen Durchlauf der Iteration betrachtet. Für den nächsten Iterationsdurchlauf werden dann die Skelettpunkte gesetzt und andere Pixel gelöscht. Dadurch entsteht ein neues Bild, in dem die Masken erneut gesucht werden müssen.

Nachdem das Thinning durchgeführt wurde, kann noch ein weiterer Schritt durchgeführt werden, um ein besseres skelettiertes Bild zu erhalten. Die Länge der einzelnen Linien kann ermittelt werden, und Linien, die eine Mindestlänge unterschreiten, werden bei der weiteren Bearbeitung dann nicht mehr berücksichtigt. Dieser Schritt ist aber nicht so einfach wie er klingt. Ein entsprechendes Programm kann schnell später wichtige Erkennungsmerkmale vernichten. Wie ein Programm aussehen könnte, welches die Länge der Linien erkennt, war den Studierenden nicht bekannt.

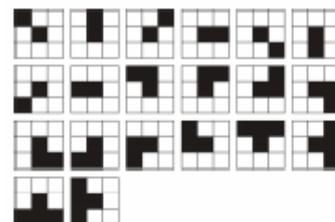


Abbildung 39 zeigt einen gethinneten Fingerabdruck. Mit dem so erhaltenen skelettierten Bild kann nun weiter gearbeitet werden, um charakteristischer Merkmale zu erkennen.

**Abbildung 39:**  
**Bearbeiteter Abdruck**

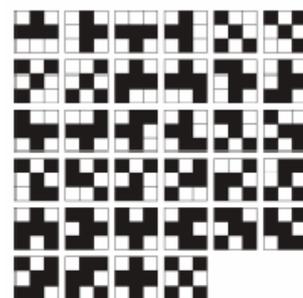
**Ansatz über Minutien:**

Auch mit dieser Fragestellung haben sich die Studierenden beschäftigt, wobei der Ansatz über Minutien durch die Schülerinnen und Schüler wenig bearbeitet wurde, da einige fundamentale Problemkreise diesen Ansatz erschwerten (siehe oben).



Minutien sind Abzweigungen und Endpunkte der papillaren Linien. Wenn das Fingerabdruckbild vorher einer Skelettierung unterzogen wurde, lassen sich diese mit Hilfe von den 3x3-Masken erkennen. Ähnlich wie bei den Filtermasken liegt der Pixel, von dem ausgegangen werden soll, in der Mitte der Maske. Um Dopplungen zu vermeiden, muss dieser Pixel schwarz sein. Falls ein weißer Pixel in der Mitte der Maske liegt, wird er übergangen. Nach diesem System braucht man 20 Masken für die Endungen und 34 Masken für die Verzweigungen. Für jeden schwarzen Pixel

**Abbildung 40: Endungen**



**Abbildung 41:**  
**Verzweigungen**



muss überprüft werden, ob eine dieser Masken auf seine Umgebung passt. Endungen können wie in Abbildung 40 aussehen. Verzweigungen sehen wie in Abbildung 41 aus. Insgesamt müssen also 54 Vergleiche durchgeführt werden. Um Rechenzeit zu sparen, werden die untersuchten 3x3-Masken codiert. Dazu werden die Pixelfelder wie in Abbildung 42 nummeriert.

3	2	1
4	X	0
5	6	7

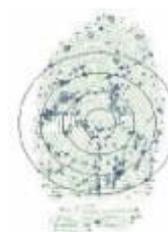
$2^3$	$2^2$	$2^1$
$2^4$	X	$2^0$
$2^5$	$2^6$	$2^7$

**Abbildung 42: Nummerierung**      **Abbildung 43: Werteinträge**

Jedes Feld erhält einen Wert, wie in Abbildung 43 dargestellt. Die Werte werden für die Felder addiert, in denen sich ein schwarzer Pixel befindet. Diese Werte werden mit den Werten der 54 ebenfalls codierten Masken verglichen. Jede Kombination hat ihre eigene Summe, keine tritt doppelt auf. Die Summe kann gleichzeitig als Nummer

verwendet werden. So wird ebenfalls festgehalten, um welche Art Minutie es sich handelt. Zu diesem Verfahren ist jedoch zu sagen, dass es wohl relativ fehleranfällig ist. Durch die große Anzahl an Masken könnten z.B. Endungen erkannt werden, wo eigentlich keine sind. Ein Pixel, der seitlich an einer Linie „hängt“, kann auch durch eine Verunreinigung hervorgerufen sein, ein Staubkörnchen würde da schon reichen. Sicherer wäre es, z.B. Masken mit größeren Ausschnitten zu verwenden, um z.B. nur Endungen an Linien zu erkennen, die mindestens zwei oder drei Pixel lang sind. Zudem ist dieses Verfahren auch sehr von der Qualität des Skelettbildes abhängig. Das Bild, das von den Schülerinnen und Schüler erzeugt wurde (siehe oben), hat durch seine starke Ausdünnung deutlich mehr Endungen, weil durchgehende Linien mehrmals abgeschnitten wurden.

Es bleibt nun die Frage, wie Minutien zur Wiedererkennung des Fingerabdrucks verwendet werden können. Zur Wiedererkennung eines Fingerabdrucks soll hier das Schwerpunkt-Verfahren erwähnt werden. Für jede erkannte Minutie ist die Position in der Matrix bereits bekannt und gespeichert. Dabei kann die Nummer der Spalte als x-Koordinate und die Nummer der Zeile als y-Koordinate aufgefasst werden. Von allen Minutien werden die Mittelwerte der x- und der y-Koordinaten berechnet und so der Schwerpunkt ermittelt. Der Abstand der Minutien zum Schwerpunkt wird als Länge des Differenzvektors (aus Vektor zum Ort des Schwerpunktes und Vektor zum Ort der Minutie) errechnet. Um den Schwerpunkt werden konzentrische Kreise gezogen (siehe Abbildung 44). Die



**Abbildung 44: konzentrische Kreise**



Merkmale zwischen den Kreislinien werden gezählt. Wenn die Anzahl der Merkmale zwischen den einzelnen Kreislinien mit dem Vergleichsbild übereinstimmt, gilt der Fingerabdruck als identifiziert. Es besteht die Möglichkeit, eine Toleranz bei der Anzahl der Übereinstimmungen einzuräumen. Dabei könnte zwischen Endungen und Verzweigungen oder sogar Art der Minutie (eine der 54 bereits erwähnten) unterschieden werden. Auf diese Weise würde das Verfahren etwas sicherer. Der Vorteil des Verfahrens liegt darin, dass eine Verschiebung oder eine Rotation des Abdruckes keine Rolle spielt.

Da durch die Skelettierung und andere Bildbearbeitungen Informationen verloren gehen oder verfälscht werden können, sollte auch untersucht werden, wie sich die Minutienerkennung auch ohne die Skelettierung durchführen lassen könnte. Außerdem ist der Bearbeitungsaufwand für die Skelettierung recht groß. Beim Vergleichen mit Datenbanksätzen kann dies ein erheblicher Nachteil sein. Der Aufwand wird deutlich geringer, wenn also versucht wird, Minutien direkt im gescannten Graustufen-Bild aufzufinden.

Die Grundidee für dieses Auffinden ist, Rillen des Abdrucks im Bild zu erkennen, und dann ihren Verlauf zu verfolgen. Der Startpunkt dafür ist beliebig. Mit Hilfe des Gradienten wird von dort der lokale Verlauf der Rille bestimmt. Es wird also ein möglichst dunkler Punkt im Graustufen-Bild gesucht. Senkrecht zum Verlauf der Rille wird ein Schnitt durch die Rille gemacht und der Intensitätsverlauf in der Umgebung von einigen Pixeln bestimmt und geglättet. Dadurch werden Störungen herausgefiltert. Die Mitte des geglätteten Verlaufs wird als Maximum und somit als Ort der Rille angesehen. Die Glättung (mit einer Maske ähnlich der „Gauß-Glocke“) ist deshalb notwendig, weil es teilweise sogenannte „Vulkansilhouetten“ gibt (bei einer drei Pixel breiten Rille ist der mittlere Pixel heller als die beiden, die ihn umgeben). Die Bestimmung des Intensitätsverlaufs und die Glättung werden in jedem Schritt ausgeführt, den der Algorithmus die Rille entlang läuft. Somit ergibt sich eine Ansammlung von lokalen Maxima. Diese ergeben aneinandergereiht eine polygonale Annäherung an die Rille. Vom Startpunkt aus läuft der Algorithmus in zwei Richtungen die Rille entlang. Die Rillenverfolgung wird abgebrochen, falls der zu untersuchende Bereich eingeschränkt und dieser verlassen wurde, falls eine Rille zu Ende ist (kein Maximum in der Umgebung eines bestimmten Winkels zur Richtung der Rille), falls ein Punkt zu einer bereits früher detektierten Rille gehört (Verzweigung, Kreuzung) oder falls sich die Richtung der Rille zu stark geändert hat (evtl. Fehler in der Verfolgung). Der Algorithmus stoppt und speichert die Koordinaten beim Ende einer Rille oder einer Rillenkreuzung. Damit solche Kreuzungen auch erkannt werden können, wird eine Hilfsabbildung erzeugt. Dort wird der Verlauf, den der Algorithmus bisher untersucht hat, mit Hilfe eines Wertes, der für jede



Rille anders ist, im Größenverhältnis 1:1 gespeichert. Die Rillen werden auf eine bestimmte Breite normiert. Um sicherzugehen, dass jede Rille detektiert wurde, wird zu jedem Punkt des Bildes die nächstgelegene Rille bestimmt. Wenn eine Rille zu Ende oder zu stark gekrümmt ist, wird dieser Punkt als End-Minutie gekennzeichnet. Wenn eine Kreuzung auftritt, wird der entsprechende Punkt als Verzweigung gekennzeichnet. Wenn eine Rille aus dem Untersuchungsbereich hinaus führt, wird keine Minutie gespeichert.

Dieses Verfahren erfordert eine deutlich geringere Datenmenge als andere Verfahren und ist dadurch schneller in der Ausführung. Trotzdem gibt es Schwierigkeiten, die zu Unsicherheiten führen können. Wenn eine Rille an einer bestimmten Stelle heller wird, z.B. durch geringeren Auflagedruck, wird evtl. kein Maximum mehr erkannt und eine Endung gespeichert. Dieses Problem kann gemindert werden, indem eine höhere Toleranz für die Intensitätsmaxima eingestellt wird. Dadurch könnten wiederum Rillen erkannt werden, wo eigentlich keine sind, z.B. weil die Täler zwischen zwei Rillen zu klein sind, es tauchen also dann neue Probleme auf.

Dennoch zeigt dieser Ansatz, wie vielfältig an diese Probleme herangegangen werden kann, auch wenn das Ausgangsproblem noch nicht in allen Feinheiten gelöst werden konnte (dann würde an dieser Stelle bestimmt auch nicht die Lösung bekannt gegeben werden!).

Auch die Lösungsversuche der Studierenden in den anderen Schulen behandelten im Prinzip die Methoden der Bildbearbeitung, Fehlerbehebung und Skelettierung. Diese Wiederholungen werden in diesem Bericht aus Platzgründen nicht vorgetragen. Interessant ist allerdings das Ergebnis der Studierenden, die am Emil-Krause-Gymnasium tätig waren. Sie haben die Schüleridee, anhand der Anzahl und der Abstände von Waagrechten die Identität zu überprüfen, aufgegriffen und in einem Programm umgesetzt.

Grund für diese Auswahl ist außerdem die Tatsache, dass diese Gruppe zur Abwechslung keinen Minutienvergleich zur Erkennung angestrebt hatte. Wie oben beschrieben, konnte die Schülergruppe aber nicht alle hierbei entstehenden Probleme lösen. Die drei Probleme, die für die Schülerinnen und Schüler noch offen blieben, waren:

- das Erstellen eines Skelettbilds,
- die Ermittlung der Waagrechten und Festlegung von Kriterien für den Vergleich
- die Frage, was mit Fingerabdrücken geschieht, die beim Einscannen um einen unbekannt Winkel gedreht wurden.



Die Problematik der Rotation kann auch das jetzt vorgestellte Verfahren nicht lösen. Der Vorschlag der Studierenden zur „einfachen“ Lösung wäre, mehrere, um einige Grad gedrehte Fingerabdrücke als Fingerabdruck einer Person abzuspeichern und jeweils mit dem Scan zu vergleichen, um auch rotierte Fingerabdrücke erkennen zu können.

Zur Lösung der beiden übrigen Probleme haben die Studierenden ein Programm geschrieben. In den folgenden Programmbeschreibungen werden wesentliche Teile des Programms (Abbildung 45) erläutert.

<pre> Das Programm 'Waagrechte' ( 1) %Bearbeitung des ersten (neuen) Fingerabdrucks ( 2) B = imread ('A.tif'); ( 3) p = skelett(B); ( 4) q=p; ( 5) for a=1:199 ( 6)   s(:,a)=q(a:a+99); ( 7) end ( 8) ( 9) (10) %Bearbeitung des zweiten (schon bekannten) Fingerabdrucks (11) B = imread ('A.tif'); (12) p = skelett(B); (13) r=p(100:199); (14) (15) (16) %Vergleich von den beiden Fingerabdrucken mithilfe der Vektoren r und s (17) for j=1:199 (18)   d(j)=0; (19)   for i=1:100 (20)     if s(i,j)==r(i); (21)       d(j)=d(j)+1; (22)     end (23)   end (24) end (25) d=d'; (26) (27) (28) c=0; (29) for b=1:199 (30)   if d(b)&gt;=99; (31)     c=c+1; (32)   end (33) end (34)  (35) (36) if c==1; (37)   'ja' (38) else 'nein' (39) end  Das Unterprogramm 'Skelett' (1) function p=skelett(B) (2) (3) B=B(:,:,1);%Merkwürdigerweise wird der Fingerabdruck immer 3fach (4) %eingelassen. Durch die obige Zeile wird nur eine Matrix weiter bearbeitet. (5) (6) %Bildung eines weien Randes (7) for a=1:302 (8)   for b=1:302 (9)     if a==1  a==302  b==1  b==302 (10)      A(a,b)=255; (11)     else A(a,b) = B(a-1,b-1); (12)     end (13)   end (14) end (15) (16) % Filter (17) for n = 2:301 (18)   for m = 2:301 (19)     A(n,m)=(A(n-1,m-1)+A(n-1,m)+A(n-1,m+1)+A(n,m-1)... (20)       ...+A(n,m+1)+A(n+1,m-1)+A(n+1,m)+A(n+1,m+1))/8; (21)   end (22) end (23) %Erstellen eines Schwarz-Wei-Bildes (24) for i=2:301 (25)   for j=2:301 (26)     if A(i,j)&lt;=150 ; (27)       A(i,j)=0; (28)     else A(i,j) = 255; (29)     end </pre>	<pre> (30)   end (31) end (32) (33) %Die Skelettierung (34) durch=1; (35) weiter=1; (36) start =2; (37) while weiter&gt;0 (38)   weiter=0; (39)   for x=start:4 (40)     switch x (41)       case 1 (42)         anzf=2; (43)         anfs=2; (44)       case 2 (45)         anzf=2; (46)         anfs=3; (47)       case 3 (48)         anzf=3; (49)         anfs=2; (50)       case 4 (51)         anzf=3; (52)         anfs=3; (53)     end (54)     while anzf&lt;=301 (55)       b=anfs; (56)       while b&lt;=301 (57)         B=A(anzf-1:anzf+1 , b-1:b+1); (58)         m=0; (59)         if B(2,2)==0 (60)           if B(2,1)==255 &amp;(B(1,1)==0 B(1,2)==0); (61)             m=m+1; (62)           end (63)           if B(1,2)==255&amp;(B(1,3)==0 B(2,3)==0); (64)             m=m+1; (65)           end (66)           if B(2,3)==255&amp;(B(3,3)==0 B(3,2)==0); (67)             m=m+1; (68)           end (69)           if B(3,2)==255&amp;(B(3,1)==0 B(2,1)==0); (70)             m=m+1; (71)           end (72)           if m==1; (73)             A(anzf,b)=255; (74)             if sum(sum(B))&lt;1530 (75)               weiter=weiter+1; (76)             end (77)           end (78)           end (79)           b=b+2; (80)         end (81)         anzf=anzf+2; (82)       end (83)     end (84)     start=1; (85)     durch=durch+1; (86)   end (87) (88) (89) % Abfrage der Waagerechten (90) for i=1:300 (91)   z=0; (92)   p(i)=0; (93)   for j=1:300 (94)     if A(i,j) == 0; (95)       z=z+1; (96)     else (97)       z=0; (98)     end (99)     if z &gt;= 5 (100)      p(i)=1; (101)    end (102)  end (103) end (104) p=p'; </pre>
--	--

Abbildung 45: Programm



### **Das Programm „Wagerechtenvergleich“**

Das Programm gliedert sich in zwei Teile: Im ersten Teil (Zeile 1-13) werden nacheinander Fingerabdrücke eingelesen (Zeile 2 und 11) woraufhin durch den Befehl  $p = \text{skelett}(B)$  das Unterprogramm "Skelett" aufgerufen wird, das einen Vektor  $p$  des  $300$  zurück gibt (zur Funktion des Unterprogramms und der Beschaffenheit des Vektors siehe unten). Für den ersten Fingerabdruck wird dieser Vektor umbenannt, damit er nicht durch den zweiten überschrieben wird (Zeile 4). Dasselbe geschieht für den zweiten Fingerabdruck in Zeile 11-12.

Da der Finger beim Einscannen vertikal verschoben werden kann, wird nicht der gesamte Vektor  $p$  verglichen, sondern nur ein Vektor des  $100$ . Für den ersten Finger wird daher eine Matrix  $s$  erzeugt, in der sich jeweils Teile des Vektors  $q$  befinden (Zeile 5-7). Für den zweiten Fingerabdruck (dies soll derjenige sein, der schon bekannt ist) wurde aus den mittleren 100 Einträgen ein Vektor  $r$  des  $100$  gebildet (Zeile 13).

Im zweiten Teil wird nun zunächst der Vektor  $r$  mit jeder Spalte der Matrix  $s$  verglichen. Durch die Variable  $d$  wird festgehalten, wie viele Übereinstimmungen in jeder Spalte von  $s$  mit  $r$  vorhanden sind (Zeile 16-25). Schließlich wird in Zeile 28-39 überprüft, ob in genau einer Zeile mehr als 99 Einträge identisch sind. Denn theoretisch müsste es genau eine Zeile geben, in der alle Einträge übereinstimmen. Falls es eine Übereinstimmung gibt, wird „ja“ als Antwort gegeben, ansonsten „nein“.

### **Das Unterprogramm „Skelett“**

#### **Zeile 6-14:**

Die Fingerabdrücke sollen mit Hilfe von 3x3-Matrizen skelettiert werden. Damit dabei auch alle Bildpixel berücksichtigt werden, wird in diesen Zeilen ein weißer Rand von der Breite eines Pixels um den Abdruck herum gelegt.

#### **Zeile 16-21:**

Dieser Filter dient dazu, leichte Störungen zu beseitigen. Dies geschieht dadurch, dass jedem Pixel der Mittelwert seiner acht Nachbarn zugewiesen wird. Dieser Filter wurde von den Schülerinnen und Schüler übernommen.

#### **Zeile 23-31:**

Damit überhaupt eine Skelettierung stattfinden kann, muss das Bild zunächst in ein S/W-Bild umgewandelt werden. Dazu wird der Mittelwert der mittleren 200 Pixel bestimmt, da je nach Aufdruck des Fingers der eingescannte Abdruck mehr oder weniger dunkel sein kann. Zur Berechnung des Mittelwerts wird nicht der



gesamte Fingerabdruck benutzt, da es (vorwiegend) in den Randbereichen zu sehr hellen Stellen kommen kann, die den Mittelwert verfälschen würden.

#### Zeile 34:

Die Variable „durch“ ist eigentlich nicht notwendig, aber durch sie kann man ermitteln, wie viele Durchläufe nötig waren, um den Fingerabdruck zu skelettieren, da sie am Ende jeden Durchlaufs um eins erhöht wird.

#### Zeile 39-53:

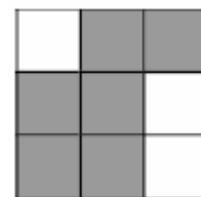
Beim Skelettieren ist es sinnvoll, nicht in jedem Durchlauf bei jedem Pixel zu untersuchen, ob er gelöscht werden kann oder nicht. Daher haben wir die gesamte Pixelmenge in vier echte Teilmengen unterteilt: A beinhaltet die Pixel, deren Zeilen- und Spaltenwert gerade ist, B die Pixel, deren Zeilenwert gerade und deren Spaltenwert ungerade ist, C die Pixel, deren Zeilenwert ungerade und deren Spaltenwert gerade ist und D die Pixel, deren Zeilen- und Spaltenwert ungerade ist. Dies ist im Programm an den Anfangswerten von anzf und anfs erkennbar. Die Werte werden am Ende der Schleife auf  $anzf=anzf+2$  bzw.  $b=b+2$  gesetzt (Zeilen 79 und 81).

#### Zeile 57 und 59:

In dieser Zeile werden die 3x3-Matrizen gebildet (Zeile 57) und nur diejenigen untersucht, deren mittlerer Pixel schwarz ist (Zeile 59).

#### Zeile 60-71:

Zur Erstellung eines Skelettbildes verwenden die Studierenden eine andere Methode als die Schülerinnen und Schüler. Neusius und Olszewski entwickelten einen Algorithmus, der zur Skelettierung den Eulerschen Polyedersatz benutzt: Für alle konvexen Polyeder gilt:  $V-E+P=2$  wobei V die Anzahl der Ecken, P die der Flächen und E die der Kanten bedeutet. Wendet man die Euler-Charakteristik auf eine 3x3-Matrix an, so gibt  $G=VE+P$  die Anzahl der zusammenhängenden schwarzen Objekte an, wobei V die Anzahl der Ecken der schwarzen Pixel, E die Anzahl der schwarzen Kanten und P die Anzahl der schwarzen Flächen ist. Ein Beispiel ist in Abbildung 46 zu sehen. Wendet man auf diese Matrix die Euler-Charakteristik an, so erhält man mit  $V=13$ ,  $E=18$  und  $P=6$ :  $G=13-18+6=1$ . Entfernt man das mittlere Pixel, ändert sich die Euler-Charakteristik nicht. Daher könnte in diesem Fall der mittlere Bildpunkt gelöscht werden.

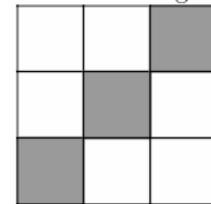


**Abbildung 46: keine Veränderung der Charakteristik**



Abbildung 47 zeigt den anderen Fall. Hier würde die Euler-Charakteristik von  $G=1$  auf  $G=2$  wechseln; daher darf hier der mittlere Bildpunkt nicht gelöscht werden.

Ist  $G$  die Euler-Charakteristik einer  $3 \times 3$ -Matrix und  $G'$  die Euler-Charakteristik derselben Matrix nach dem Löschen des mittleren Pixels, so gilt für  $D := GG', V-V' = L, E-E' = K$  und  $P-P' = 1: D = L - K + 1$ . Dabei ist  $L$  die Anzahl weißer Eckpixel mit weißen Nachbarn und  $K$  die Anzahl weißer Pixel, die nicht in einer Ecke liegen.



**Abbildung 47:**  
**Veränderung**  
**der**  
**Charakteristik**

Ist  $D=0$  (also das Zentrumspixel entfernbar), so ist dies gleichbedeutend mit  $L=K-1$ , was wiederum bedeutet, dass der Fall, dass ein Nicht-Eckpixel weiß und mindestens eins der beiden im Uhrzeigersinn folgenden Pixel schwarz ist, genau einmal auftreten muss, damit das mittlere Pixel entfernt werden darf.

Zeile 74:

Wie bei jeder Methode zur Skelettierung muss festgelegt werden, wann die Skelettierung beendet ist (ansonsten würde ein ganz weißes Bild entstehen). Es gibt zwei Mengen von  $3 \times 3$ -Matrizen, die nicht mehr weiter bearbeitet werden sollen.

Die erste Menge besteht aus solchen  $3 \times 3$ -Matrizen, in denen neben dem Pixel in der Mitte nur ein weiteres Pixel schwarz ist; in diesem Fall handelt es sich um eine Endung, die nicht mehr weiter verkürzt werden soll. Die zweite Menge umfasst all jene  $3 \times 3$ -Matrizen, die zwei oder mehr getrennte weiße Regionen haben; diese Matrizen zeigen beide Seiten eines Skeletts. Diese Matrizen haben demnach drei schwarze Pixel. Der Algorithmus endet daher, wenn der Wert aller Pixel kleiner als  $6 \cdot 255 = 1530$  ist, also falls die Matrix drei oder weniger schwarze Pixel enthält. Dies bedeutet andersherum: Wenn mehr als drei Pixel der Matrix schwarz sind, wird die Variable weiter um eins erhöht, und der Algorithmus startet erneut in Zeile 37. (Zu Beginn eines jeden Durchlaufs wird weiter immer auf Null gesetzt, vgl. Zeile 38.)

Zeile 89-104:

Damit im Programm „Waagrechtvergleich“ die Fingerabdrücke verglichen werden können, wird nun ein Vektor  $p$  erzeugt, der angibt, in welcher Zeile des Bildes sich mehr als 5 schwarze Felder nebeneinander befinden. Hierzu wird zunächst ein Nullvektor erzeugt (Zeile 92), dessen Zeilen dann an den entsprechenden Stellen durch eins ersetzt werden. Der Wert fünf ist dabei durch Ausprobieren ermittelt worden.

Ein eingelesener Fingerabdruck wird vom Programm, wie in Abbildung 48 veranschaulicht, bearbeitet.



**Abbildung 48: Bearbeitung eines Fingerabdrucks**

### **Bewertung des Programms**

Das vorliegende Programm eignet sich nicht direkt dazu, eine Person anhand ihres Fingerabdrucks zu identifizieren. Es können lediglich verschiedene, eingescannte Fingerabdrücke (die Anzahl der Personen ist hierbei unerheblich) voneinander unterschieden werden. Das Problem des Programms ist das Zusammenspiel des Waagrechtensvergleichs mit der Skelettierung: Auch wenn die Skelettierung sehr exakt ist, ändert sich die Breite der schwarzen Rillen sobald der Finger beim Einscannen etwas weniger oder mehr auf die Fläche gedrückt wird. Die Mitten dieser Rillen werden zudem ein oder zwei Pixel weiter oben oder unten sein, was Auswirkungen auf das Skelettierungsprogramm hat. Die Vektoren  $p$  und  $q$ , die im Programm „Waagrechtensvergleich“ erstellt werden, werden daher sehr viele Unterschiede aufweisen.

Auch die Variable  $c$ , die angibt, ob auch wirklich nur eine Spalte der Matrix  $s$  mit dem Vektor  $r$  übereinstimmt, erweist sich als problematisch: so schön die Theorie auch ist, es gibt immer wieder Fingerabdrücke, bei denen Teile des Vektors  $q$  identisch sind, und somit zwei oder mehrere Spalten der Matrix  $s$  identische Einträge haben. In diesem Fall würden identische Fingerabdrücke nicht als identisch betrachtet.

#### **7.4. Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf das Projekt**

Die Reaktionen und Rückmeldungen der einzelnen Kurse fielen sehr unterschiedlich aus. So war die Schülerinnen und Schüler des Leistungskurs 1 des Gymnasiums Tonndorf insgesamt recht zufrieden mit ihren Ergebnissen und waren begeistert, dass sie die Mathematik, die sie bis dahin in all den Schuljahren gelernt hatten (z.B. Winkelsätze, Pythagoras und Kurvendiskussion) endlich einmal brauchten, um „echte“ Probleme zu bearbeiten. Die Umsetzung geschah in diesem Kurs ausschließlich mit DERIVE, welches ja aus dem



Unterricht bekannt war. Das Modellieren wurde also nicht durch aufwendiges Neulernen von MATLAB behindert.

Die Schülerinnen und Schüler des Leistungskurs 2 zeigten sich zwar interessiert und motiviert; doch sie waren zu Anfang etwas unsicher und gehemmt, da sie wahrscheinlich mehr Anleitung von den Studierenden erwartet hatten, und die neue Arbeitsform sich erst einschleifen musste.

Der Tiefpunkt dieser ganzen Projektrunde lässt sich besonders am Beispiel des Kurses am Emil-Krause-Gymnasium ablesen. Die Schülerinnen und Schüler waren nach einer arbeitsamen Phase schnell unmotiviert, als es um die Programmierung in MATLAB ging. Zunächst empfanden die Lernenden das Thema, die Arbeitsweise und sogar die Erfahrungen in MATLAB reizvoll. Nach dem Erarbeiten der verschiedenen Lösungsansätze fehlte ihnen jedoch die Möglichkeit die Methoden mit MATLAB zu automatisieren oder überhaupt Schritte zu berechnen. Sie sahen nunmehr den Schwerpunkt in der Informatik und weniger bei der Mathematik. Rückblickend bedauerten sie sogar die Beschäftigung mit dem Projekt, da sie viel Stoff im Unterricht nachholen mussten, weil ihnen wichtige Unterrichtsstunden verloren gegangen seien [sinngemäß zitiert!]. Auch die Vorträge über das Arbeitsfeld „angewandte Mathematik“ konnten die Schülerinnen und Schüler dieses Kurses nicht überzeugen.

Auch der Kurs aus Lohbrügge teilte diese Argumente. Vor allem die Notwendigkeit intensivster Vorkenntnisse in der Programmierung veranlasste sie, diese Projekt für Informatikleistungskurse zu empfehlen. Des Weiteren stellten sie fest, dass ein Grundinteresse an derartigen Projekten vorhanden sein muss. Einige konnten sich nicht auf diese intensive und auch arbeitsreiche Arbeitsform einlassen und waren somit nie wirklich involviert. Andere wiederum gingen in dem Projekt förmlich auf. Die Schülerinnen und Schüler aus dem Gymnasium Lohbrügge sahen jedoch auch einige positive Aspekte am Projekt. Sie fanden die Aufgabe interessant und hielten ihre Ergebnisse für brauchbar. Das eigenständige und freie Modellieren an einem Problem fanden einige spannend und lohnenswert. Die Arbeitsform in der Gruppe war ansprechend.

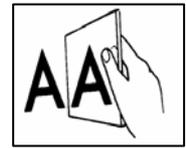
#### 7.5. Problematisierung und didaktische Reflexion des Modellierungsprozesses

Wie schon die Reaktionen der Schülerinnen und Schüler andeuten, ist dieses Thema eher ambivalent zu sehen. Auch aus didaktischer Sicht bleibt die Beurteilung schwierig.

Zum einen ist dies ein komplett authentisches Problem. Der Eingangsvortrag hatte deutlich gemacht, dass es noch keine adäquate Methode zur Identifikation durch den Fingerabdruck gibt. Dies macht die Beschäftigung mit dem Thema



sicherlich spannend. Doch ist die Annahme, dass Schülerinnen und Schüler der Klasse 12 nun „gute“ Lösungen finden können, etwas naiv. In der Wissenschaft konzentriert man sich mittlerweile auf die Irisabtastung. Dennoch zeigt sich auch, dass die Lernenden Lösungen entwickelt haben, die sich durchaus sehen lassen können. Das Problem einer Abwägung in diesem Spannungsverhältnis bleibt also nach wie vor. Das nicht zu unterschätzende Frustrationspotenzial einer Überforderung und die im Prinzip zu komplizierten Programmierungen in MATLAB lassen uns schließen, dass es bessere Modellierungsbeispiele als dieses geben wird. Die Reflexion über die mathematischen Tätigkeiten, das Metawissen über die Modellierungstätigkeit sowie die Zufriedenheit über die eigenen Resultate sind in diesem Beispiel nicht genügend gewährleistet.



#### **IV. Reflexion der drei Seminarzyklen**

##### **1. Darstellung der drei Zyklen**

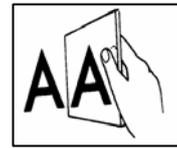
###### **1.1. Wintersemester 2000/2001 und Sommersemester 2001**

Der erste Durchlauf des Seminars „Modellierung in der Schule“ war durch organisatorische Fragen und die Reflexion des Modellierungsprozesses geprägt. Die ersten Seminarsitzungen wurden damit verbracht, zu klären, wie alles ablaufen soll, wer sich welcher Schule zuordnet und welche Aufgaben bearbeitet werden. Im Anschluss begann dann die Arbeit an den Schulen. Für die meisten Studierenden in diesem Durchlauf bedeutete dies, dass sie wie die Schülerinnen und Schüler auch völlig unbedarft mit einem Modellierungsproblem konfrontiert wurden. Viele Studierendengruppen beschlossen daher, den Modellierungsprozess gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern zu durchlaufen. Dabei sahen sie es neben den strukturgebenden Maßnahmen als ihre Aufgabe an, Prozesse zu ordnen und gegebenenfalls mit Fachwissen Hilfestellung zu leisten.

Diese Herangehensweise funktionierte an den unterschiedlichen Schulen unterschiedlich gut. So war es am Gymnasium Oberalster völlig unproblematisch, die Schülerinnen und Schüler einem Modellierungsproblem auszusetzen, weil sie offene Unterrichtsformen und Aufgaben dieser Art von ihrem Lehrer gewohnt waren. Ganz anders gestaltete sich die Arbeit zum Beispiel am Gymnasium Emilie-Wüstenfeld. Hier waren die Schülerinnen und Schüler derartige Aufgaben nicht gewohnt und mussten somit erst lernen mit der offenen Situation, der Unter- und Überbestimmtheit der Aufgaben umzugehen.

Positiv ist in diesem Zyklus das den Modellierungsprozess begleitende Seminar zu bewerten. Hier konnten regelmäßig die Fortschritte der einzelnen Gruppen verglichen werden, es konnte mathematischer Rat eingeholt werden und es bestand die Möglichkeit, sich über didaktische Fragestellungen, die während des Modellierungsprozesses entstanden sind, auszutauschen. Außerdem wurde in diesem Seminar auch den Studierenden die Möglichkeit gegeben, Modellierungsaufgaben zu durchlaufen. Hier war die Anleitung aber leider noch nicht ausgereift.

Auch das Bearbeiten nur eines Modellierungsbeispiels muss positiv bewertet werden, denn schon in diesem Durchlauf war eher zu wenig Zeit vorhanden. So fiel es der Gruppe am Gymnasium Oberalster schwer, sich Zeit für die Aufbereitung der Präsentation zu nehmen, weil der Modellierungsprozess zu diesem Zeitpunkt in vollem Gange war.



Das größte anzumerkende Defizit des Seminars war, dass der Modellierungsprozess nicht explizit thematisiert wurde, was eine Reflexion und eine Betrachtung auf der Metaebene durch die Studierenden schwierig machte.

Die verwendeten Beispiele sind größtenteils positiv zu bewerten. Sowohl die Gruppen, die an dem Fischfangbeispiel als auch die, die am Risikomanagement gearbeitet haben, waren mit dem Verlauf des Prozesses insgesamt sehr zufrieden und haben auch diese beiden Beispiele positiv bewertet. In beiden Fällen wurde sowohl seitens der Schülerinnen und Schüler, als auch von der Seite der Studierenden festgestellt, dass das Projekt als Erfolg zu werten ist, und Modellierung ihren Platz im Schulalltag verdient.

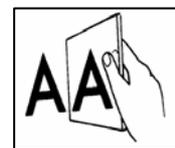
Etwas anders sieht das Fazit bei dem Beispiel „Krankenversicherung“ aus. Bei der Vorstellung dieser Aufgabe wurden relativ genaue Vorgaben bezüglich der Problematisierung gemacht, die die eigentliche Offenheit der Aufgabe einschränkten. Gleichzeitig war das Problem aber für die Schülerinnen und Schüler relativ komplex, was aber auch an den Kursen gelegen haben könnte, die sich mit dieser Aufgabe beschäftigt haben.

## 1.2. Wintersemester 2001/2002 und Sommersemester 2002

In diesem Durchlauf wurden diverse Dinge gegenüber dem ersten Durchlauf verändert. So sollten sowohl die Studierenden, als auch später die Schülerinnen und Schüler zur Einführung sich mit einer kleineren Modellierungsaufgabe beschäftigen, und auch der Modellierungsprozess an sich wurde thematisiert. Sowohl die Studierenden als auch die Schülerinnen und Schüler waren so wesentlich besser auf den eigentlichen Hauptteil des Seminars, nämlich das zweite Modellierungsbeispiel, vorbereitet und konnten auf ein gewisses Maß an Erfahrung zurückgreifen. Dieser Effekt hätte aber noch gesteigert werden können, wenn es nach dem ersten Durchlauf ein Feedback zu der geleisteten Arbeit gegeben hätte.

Der große Nachteil, der sich aus den zwei durchzuführenden Modellierungsbeispielen ergibt, ist, dass die schon beim ersten Durchlauf des Seminars zu knappe Zeit noch wesentlich verkürzt wurde. Komplexe Modellierungsaufgaben wie „Molecular Alignment“ oder „Strahlentherapie“ sind mit Schülerinnen und Schülern einfach nicht in der Zeit eines Semesters zu schaffen, in der keine Ferien und andere Sondertermine sind, wenn man sich nur alle zwei Wochen für anderthalb Stunden trifft.

Von den Studierenden wurde an diesem Durchlauf des Weiteren kritisiert, dass das begleitende Seminar, in dem Probleme mathematischer oder didaktischer Natur angesprochen werden konnten, nicht wie noch im ersten Durchlauf stattgefunden hat. Den Studierenden fehlte, sich über die Probleme austauschen



zu können und sich mathematischen oder didaktischen Rat von der gesamten Gruppe der Studierenden oder den betreuenden Professoren zu holen.

Die in diesem Durchlauf behandelten Modellierungsbeispiele waren von sehr unterschiedlicher Qualität. Positiv fällt besonders das Hubschrauberproblem auf. Es kann ohne besonderes Fachwissen oder besondere Computerprogramme bearbeitet werden, zeichnet sich durch eine große Realitätsnähe aus und benötigt somit keine besonders lange Einarbeitungszeit. Die Schülerinnen und Schüler sind bei diesem Problem zu interessanten Ergebnissen gekommen, auch wenn die besonders bei diesem Beispiel knapp bemessene Zeit nicht ausreichte, eine für die jeweiligen Gruppen zufriedenstellende Lösung zu erarbeiten.

Kritischer sind die beiden folgenden Modellierungsprobleme zu bewerten. Bei der „Strahlentherapie“, vor allem aber beim „Molecular Alignment“ ist festzustellen, dass es sich um sehr komplexe Probleme handelt, die eher wenig mit der Erlebniswelt der Schülerinnen und Schüler zu tun haben. Für beide Probleme muss man sich in umfangreiche wissenschaftliche Felder einarbeiten und benötigt Fachwissen, das nicht einfach vorausgesetzt werden kann. Der enge zeitliche Rahmen verhinderte, dass die Gruppen, die diese Modellierungsbeispiele bearbeitet haben, aus eigener, wie aus externer Sicht nicht zu zufriedenstellenden Ergebnissen gekommen sind.

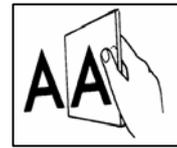
Auch bei diesem Durchlauf waren die Schülerinnen und Schüler angehalten, jeweils am Ende der Modellierungsprozesse eine Präsentation ihrer Ergebnisse vorzustellen. Für diese Arbeit wurde zusätzliche Zeit benötigt, die eigentlich nicht vorhanden war.

Trotz der Probleme mit den beiden letzten Beispielen ist dieser Modellierungsablauf als Erfolg zu werten. Nicht nur die Schülerinnen und Schüler, sondern auch die Studierenden geben an, in dem Projekt viel gelernt zu haben.

### 1.3. Wintersemester 2002/2003 und Sommersemester 2003

Der dritte Durchlauf behandelte als einziges Beispiel das Fingerprintproblem. Anfangs gab es eine Einführung für die Studierenden, in der das Thema, eventuelle Probleme und Herangehensweisen besprochen wurden. Außerdem wurde der Fingerabdruckscanner vorgestellt und es gab eine Einführung in die Arbeit mit diesem Gerät. Dann ging es direkt mit dem ersten Beispiel der Fingerprints an die Schulen, wo das Thema vorgestellt und in Kleingruppen bearbeitet wurde.

Wie schon im ersten Durchlauf trafen sich die Studierenden und Veranstaltenden des Seminars regelmäßig, um die Modellierungsprozesse an den Schulen entsprechend begleiten zu können. Dabei ging es sowohl um fachliche, als auch



fachdidaktische Probleme und Fragestellungen, die sich an den Schulen ergaben.

Ein Problem, das sich besonders in diesem Beispiel zeigte, sind die technischen Möglichkeiten der Schulen. So war es für das Fingerprintproblem nötig, mit dem Computer zu arbeiten. Dazu benötigte jede Schule einen Informatikraum mit relativ neuen Computern, das Programm MatLab und die Fingerabdruck-scannersoftware sowie entsprechende Anschlüsse an den Computern, um die Fingerabdruckscanner anzuschließen, was keinesfalls selbstverständlich ist. Aber auch wenn diese Probleme gelöst waren, blieb das Problem, dass sich die Schüler mit den entsprechenden Programmen und der Hardware zurecht finden mussten.

Diese Probleme haben sehr viel Zeit in Anspruch genommen, weil zum Beispiel die Scanner anfangs nicht geliefert werden konnten. So verlor das eigentlich tolle Beispiel der Fingerprints stark an Attraktivität.

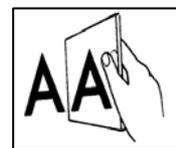
Insgesamt muss auch festgestellt werden, dass das Fingerprintbeispiel vielleicht etwas zu komplex für die Schülerinnen und Schüler war, da zusätzlich zu den hohen mathematischen Anforderungen, die das Problem an sich mit sich brachte, die Probleme mit und an den Rechnern zu lösen waren. So kam es, dass einige Schülerinnen und Schüler schnell demotiviert waren, zumal es kaum Teilerfolge gab, die ihnen aufgefallen wären.

Festzuhalten bleibt auch, dass viele der Studierende mit den Anforderungen, die an sie sowohl im technischen Bereich als auch im Bereich der Informatik gestellt wurden, überfordert waren.

Besonders positiv war in diesem Durchlauf der Zeitrahmen. Es stand im Grunde ausreichend Zeit zur Bearbeitung des Projekts zur Verfügung (wenn man davon absieht, dass derartige Probleme im Rahmen eines Jahres wohl nie abschließend behandelt werden können) und durch den anzufertigenden Zwischenbericht wurde die Zeit zwischen den Semestern gut überbrückt. Das Problem des Wiedereinstiegs in die Thematik zu Beginn Sommersemester war nicht so gravierend, weil auf die Ergebnisse des Zwischenberichts zurückgegriffen werden konnte.

Wie bei allen Seminaren, gab es auch in diesem Durchlauf eine abschließende Ergebnispräsentation, in der alle Gruppen das von ihnen Erreichte vorgestellt haben.

In allen drei Zyklen wurden begleitend zu den Modellierungsbeispielen Vorträge von Mathematikern aus Wirtschaft und Industrie über ihr Berufsleben gehalten. Dabei wurden im zweiten und dritten Durchlauf schulische statt universitäre



Räume genutzt, um dadurch mehr Zuhörerinnen und Zuhörer für die Vorträge zu gewinnen. Dies war erfolgreich. Außerdem gab es in allen drei Durchläufen eine Exkursion mit allen Beteiligten zu einer großen Firma, wie zum Beispiel VW oder Lufthansa-Technik, in der Mathematikerinnen und Mathematiker beschäftigt sind.

## 2. Gesamtbewertung der drei Zyklen

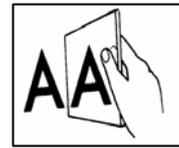
In diesem Teil sollen die Vor- und Nachteile der Abläufe der drei Seminarzyklen zusammengefasst werden und auf diesem Wege ein Vorschlag für die zukünftige Organisation eines solchen Seminars entstehen.

Während der drei Seminarzyklen hat sich gezeigt, dass eine Begleitung der Modellierungstätigkeit in didaktischer wie auch in fachlicher Hinsicht von allen Beteiligten für nötig gehalten wird. Dies ergibt sich schon daraus, dass die Modellierungssituation nicht nur für die Schülerinnen und Schüler, sondern auch für die Studierenden neu und sehr komplex ist und somit zwangsläufig Fragen auftreten. Auch ein Vorlauf, in dem der Modellierungsprozess an sich vorgestellt und anhand von kleinen Beispielen kennen gelernt wird, scheint unabdingbar. Dies ist dabei nicht nur für die Studierenden nötig, auch für die Schülerinnen und Schüler ist Modellierung meist ein völlig neues Feld, deren Handhabung sie erst lernen müssen.

Ein wohl unlösbares Problem liegt in der Zeitplanung. Modellierung an sich benötigt viel Zeit, die gerade in einer Schule mit Zentralabitur nicht beliebig verfügbar ist. Die enormen Einschränkungen des Zeitbudgets könnten nur umgangen werden, wenn die Schülerinnen und Schüler motiviert wären, sich auch in ihrer Freizeit, also in Form einer AG, zu treffen. Durch die geringe Überlappung von Semester- und Schulferien, wird der Zeitrahmen nochmals enger. Deshalb ist es wohl nicht möglich, dass mehrere komplexe Modellierungsbeispiele – so wünschenswert dies wäre – innerhalb eines Seminarzyklus' zu bearbeiten.

Daraus ergeben sich folgende Anforderungen an die Beispiele: Sie sollten mathematisch nicht zu komplex sein; sie sollten so eingegrenzt sein, dass nicht ein Großteil der Zeit darauf verwendet wird, nach einer passenden Fragestellung zu suchen und die nötigen Informationen zu sammeln; sie sollten mit geringen Kenntnissen der Informatik und im Umgang mit Computern zu lösen sein.

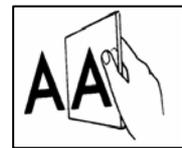
Positiv sind in diesem Zusammenhang die Beispiele „Fischfang“, „Rettungshubschrauber“ und „Risikomanagement“ aufgefallen. Sie waren klar umrissen und ließen doch die nötige Freiheit für einen offenen Modellierungsprozess. Negativ ist vor allem das Beispiel „Molecular Alignment“ aufzuführen, da es zu komplex, zu wenig mit Informationen unterfüttert, unzureichend eingegrenzt und mit Softwareproblemen behaftet war. In Bezug auf den Computereinsatz und das



Informatikwissen ist leider auch das Beispiel der „Fingerprints“ problematisch zu nennen.

Gerade an den unterschiedlichen Reaktionen der Schülerinnen und Schüler aber auch der Studierenden zeigte sich, dass die Auswahl der Modellierungsbeispiele der entscheidende Punkt für ein gutes Gelingen dieses Seminars ist.

Letztlich bleibt noch festzuhalten, dass diverse Gruppen ein Feedback vermissten und sich von dem Seminar gewünscht hätten, dass mehr Wert auf die Reflexion der Modellierungstätigkeit gelegt wird. Dies erscheint gerade vor dem Hintergrund sehr wichtig, dass die Modellierungssituation für die meisten Studierenden ein völlig neues Feld ist.



## V. Zentrale Ergebnisse der Evaluation der drei Modellierungszyklen und Fazit

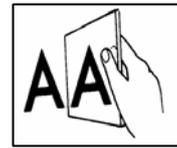
Die drei Projektzyklen wurden intensiv evaluiert: So wurden die beteiligten Schülerinnen und Schüler am Anfang und am Ende des Modellierungsseminars (mit Ausnahme des ersten Zyklus, der nur in der Mitte des Zyklus befragt wurde) mit einem Fragebogen mit offenen Fragen schriftlich befragt, und zwar zu Aspekten wie dem mathematischen Weltbild der Jugendlichen, ihren Auffassungen zur Relevanz von Mathematik in Alltag und Wissenschaft, zu den Berufswünschen und nach ihrer Einschätzung der durchgeführten Modellierungsprojekte. Die Studierenden wurden zu ähnlichen Aspekten befragt, wobei Aspekte der Integration solcher Beispiele in das Studium stärker betont wurden. Wir wollen im Folgenden ausgewählte zentrale Aspekte der Evaluation kurz darstellen, verweisen für Details auf den ausführlichen Bericht, der von Magdalena Kornella und Björn Schwarz geschrieben wurde.

Als zentrales Ergebnis des Projekts Modellierung in der Schule ist der Aufweis anzusehen, dass es möglich ist, komplexe und anspruchsvolle Modellierungsbeispiele in der Schule durchzuführen. Dies wird zum einen in den Berichten der Studierenden deutlich, die beschreiben, dass ein Großteil der Schülerinnen und Schüler bis zum Schluss an den Modellierungsaktivitäten aktiv beteiligt war, obwohl sich diese ja über einen ungewöhnlich langen Zeitraum erstreckten. Ein Student beschreibt, dass die Schülerinnen und Schüler *„[...] interessiert und konstant [mitgearbeitet haben], so dass diese in meinen Augen gute Ergebnisse erzielten.“* Besonders die Gruppenarbeit als vorherrschende Arbeitsform im Projekt wurde gelobt. Das belegen Aussagen wie:

„Sehr gut, es macht Spaß in Gruppen zu arbeiten und es ist auch häufig sehr produktiv.“ „Gut und sinnvoll, da der Austausch innerhalb der Kleingruppen und zwischen allen Gruppen viel zum Gesamtverständnis beiträgt.“ „Auch war der Austausch unter den Gruppen sehr gut, so dass die Gruppenarbeit insgesamt sehr produktiv war.“

Weiter wird die *„angenehme Arbeitsatmosphäre“* von den Studierenden ausdrücklich hervorgehoben. Wegen der guten Mitarbeit der Schülerinnen und Schüler sind die Studierenden *„[...] mit den Ergebnissen sehr zufrieden.“* Ebenso wird der spezifische, aus dem Projekt resultierende Lernerfolg für die Beteiligten betont:

„Hinterher stellt man natürlich fest, dass sie mehr wiederholt, geübt oder sogar neu gelernt haben, doch das konnte man vorher nicht wissen.“



Die Studierenden kommen daher insgesamt einheitlich zu dem Schluss, dass *„Modellierungsaufgaben [...] auf jeden Fall auch im normalen Unterricht behandelbar“* seien und *„solche Beispiele [...] ein gutes Gegenstück zum „klassischen“ Mathematikunterricht darstellen“* würden.

Zum anderen zeigt sich die Durchführbarkeit eines Modellierungsprojektes auch an den positiven Einschätzungen der Modellierungsbeispiele durch die Schülerinnen und Schüler in der Evaluation des Projekts. So finden sich dort kaum negative Reaktionen von Schülerinnen und Schülern, vielmehr dominieren die positiven Bewertungen. Dabei lassen sich mehrere Kategorien in Bezug auf die Zufriedenheit feststellen. Zum einen ist dies die Empfindung vieler Schülerinnen und Schüler, an dieser Art von Mathematik Spaß zu haben. Beispielsweise würde eine Schülerin eine Fortsetzung dieses Projektes *„persönlich gut finden, da es mir Spaß gemacht hat, daran zu arbeiten.“* In diesem Zusammenhang wird auch darauf hingewiesen, dass *„dieses Projekt [...] den Unterricht abwechslungsreicher und interessanter“* machte. Ein zweiter Grund für die Zufriedenheit der Schülerinnen und Schüler ist, dass die behandelten Beispiele *„sehr sehr realitätsnah“* seien, weshalb es *„so etwas im Unterricht geben“* sollte. Auf diesen Aspekt deuten auch Aussagen, wie:

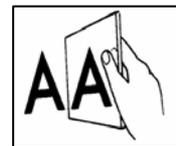
„Ja, da hierdurch der Bezug zur Realität veranschaulicht wurde, der Unterricht aufgelockert wird und damit auch die Teamarbeit gefördert wird.“  
„Ja ein kleiner Einblick auf die Mathematik in der Praxis kann nicht schaden“.

Weiter unterstreichen die Befragten ihre Zufriedenheit aufgrund der erzielten Ergebnisse:

„Ich bin zufrieden, da ich der Meinung bin, dass wir weit gekommen sind.“  
„Ich bin sehr zufrieden, wir sind weiter gekommen als gedacht.“

Analog zu den Studierenden wird die Gruppenarbeit als benutzte Arbeitsform beim Modellierungsprojekt als positiv bewertet, *„da man selbst Themen und Probleme erarbeiten konnte“*.

Als weiteres zentrales Ergebnis des Projekts ist der Nachweis anzusehen, dass solche komplexen Modellierungsbeispiele nicht hochbegabten oder besonders leistungsstarken Jugendlichen vorbehalten sind. Vielmehr sind solche Beispiele mit durchschnittlichen Schülerinnen und Schülern aus Leistungskursen Mathematik durchführbar. Konsequenz dieser Durchführung der Beispiele mit der gesamten Leistungsbreite von Leistungskursen ist natürlich, dass die erzielten Ergebnisse nicht das Niveau erreichen, was mit speziell ausgewählten



Schülerinnen und Schülern zu erreichen gewesen wäre. Insbesondere unter dem Blickwinkel der Leistungsstreuung in den beteiligten Schülergruppen ist bemerkenswert, welch hohes Niveau die Problemlösungsansätze der Schülerinnen und Schüler erreichten. Diese Einschätzung korrespondiert mit der oben dargelegten subjektiven Einschätzung der Schülerinnen und Schüler bezüglich der Qualität der erzielten Ergebnisse.

Neben dem Aufweis der „Machbarkeit“ solcher Beispiele unter den Bedingungen der Schulpraxis ist als weiteres zentrales Ergebnis der Studie die deutliche Veränderung der Einstellungen der Schülerinnen und Schüler zu Anwendungen und Modellierung anzusehen. So wird in der Evaluation deutlich, dass bei vielen Schülerinnen und Schülern vor dem Modellierungsprojekt statische Auffassungen über Mathematik und Mathematikunterricht dominierten. Dies belegen Aussagen wie

„Mathematik ist konstant, das heißt, was man heute lernt, wird auch morgen gelten.“

Mathematik sei *„der Umgang mit Zahlen“*, *„ein Fach, wo man viel Rechnen muss“*, *„Zahlen, die einen Sinn ergeben“* oder das *„Hantieren mit Zahlen“* und *„die Rechnerei“*.

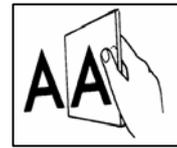
Mathematikunterricht bedeutet für die Befragten das *„Arbeiten mit Zahlen und Formeln“*. Nach dem Projekt dagegen waren anwendungsbezogene Auffassungen deutlich häufiger vertreten. Man findet verstärkt Aussagen wie

„Mathematik ist die Grundlage vieler Lebensbereiche und Berufe.“

Mathematik wird nach dem Projekt als relevant erachtet, *„da ich der Meinung bin, dass Mathematik für unser heutiges Leben unerlässlich ist, da die Mathematik vieles zusammenhält und uns eine Menge ermöglicht.“*

Gerade in den Äußerungen darüber, wie guter Unterricht aussehen sollte, wird dies deutlich. Die Schülerinnen und Schüler wünschen sich, dass der Mathematikunterricht *„realitätsbezogen“* und *„nahe am Alltagsgeschehen“* sei und die *„Behandlung von reellen Problemen im täglichen Leben“* beinhaltet. Die Unterrichtsinhalte sollten *„nah an dem Alltag gestaltet“* werden und ihr *„Anwendungsbereich im Fach oder auch woanders sollte deutlich werden“*. Insgesamt wäre es wünschenswert, wenn der Mathematikunterricht *„mit praktischen Beispielen dienen“* könnte.

Deutlich wird des Weiteren, dass die Studierenden solche Seminare sogar noch positiver bewerten als die Schülerinnen und Schüler. So stellten die



Studierenden fest, dass mit dem Seminar eine Verbindung von Mathematik und ihrer Didaktik einerseits und von Studium und Schule andererseits bewerkstelligt wurde, und damit eine Fülle interessanter Erfahrungen ermöglicht wurde. Positiv bewertet wurde, dass *„eigene Lehrerfahrungen gesammelt“* wurden und das *„Modellieren im schulischen Umfeld“* gelernt wurde. Weiter wurde der *„Austausch mit anderen Studierenden über Lehrerfahrungen und Gestaltung von Lernprozessen“* als besonders wertvoll erachtet.

Auf Grund der positiven Erfahrungen plädieren die Studierenden häufig dafür, dass die *„Praxis für Lehramtsstudenten generell mehr in das Studium integriert werden sollte“*, da sie *„sehr sinnvoll“* sei.

Häufig wurde sich für das Seminar entschieden, *„weil ich den Praxisbezug und die Möglichkeit an einer Schule zu unterrichten so gut finde“*. Diese *„Erwartungen haben sich erfüllt“*.

Gerade die Kooperation mehrerer Fachbereiche und der zusätzliche praxisnahe Kontakt mit den Schulen macht diese Veranstaltung aus der Sicht der Studierenden zu einer besonders lohnenswerten Studienerfahrung:

„Seminare die die Mathematik des FB Mathematik mit der Mathematik des Instituts für Didaktik der Mathematik des FB Erziehungswissenschaften verbinden; sowie Seminare (beider Fachbereiche), die mit der Schule zusammenarbeiten sollen ganz sicher stärker verankert werden.“

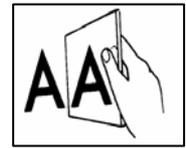
Weiter ist auf der Ebene von Detailerkennnissen Folgendes festzustellen: Die Modellierungsbeispiele wurden durchweg positiv beurteilt:

„Das Thema war sehr interessant: Schulnote 1.“

Fast durchgehend wurden die Beispiele als *„sehr realitätsnah“* eingeschätzt. Beispielsweise schrieb ein Schüler zum Problem des dritten Durchgangs, bei dem es um den Passwortsatz durch Fingerprints ging, das Thema *„betrifft uns womöglich schon in nicht so weit entfernter Zukunft“*. Außerdem ermöglichte das Projekt den Schülerinnen und Schülern einen fächerübergreifenden Blick auf mathematische Probleme. In Bezug auf das Modellierungsbeispiel Fingerprint schrieb eine Schülerin, ihr seien *„die Gefahren der Biometrie“* deutlich geworden.

Weiter stufte eine große Mehrheit die Probleme als klar und verständlich strukturiert ein. Der Grad der Strukturiertheit wurde mit *„10 von 10“* bewertet.

Dennoch sind deutliche Unterschiede zwischen den Beispielen festzustellen. So wurde bei der Behandlung des Modellierungsbeispiels Fingerprint teilweise der starke Informatikbezug kritisiert. Es sei schwierig, *„menschliche mathematische Gedankenprozesse dem Computer beizubringen“*. Es gab teilweise *„Probleme*



*mit dem Programmieren“*, da nach Ansicht einiger Befragter *„zu große Kenntnisse vorausgesetzt“* worden wären.

Positiv wurde des Weiteren die Arbeit im Team bewertet, die ersichtlich zum einen die für Modellierungsaktivitäten charakteristische Unsicherheit bei der Bearbeitung von Problemen ohne bekannten Lösungsalgorithmen leichter bewältigen ließ. Zum anderen ermöglichte die Arbeit im Team die Entwicklung einer größeren Palette möglicher Lösungsansätze. Gruppenarbeit sei *„gut, da unterschiedliche Lösungsansätze erarbeitet werden konnten“* und *„man als einzelner oder als eine große Gruppe nicht so viel erreicht hätte“*. Weiter fällt *„das Arbeiten [...] leichter“* und ist produktiver,

„da wir am Anfang sehr viele unterschiedliche Ideen hatten und somit schnell den Einstieg gefunden haben. Zum Schluss auch sehr gut, da wir uns aufteilen konnten und so mehrere kleine Gruppen für die verschiedenen Probleme hatten“.

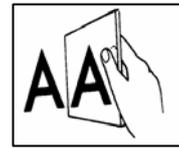
Besonders sei hervorgehoben, dass einige Schülerinnen und Schüler auf die Frage nach dem Lernerfolg *„Teamwork“* angaben.

Ein Schüler beschreibt die Arbeit in der Gruppe wie folgt:

„Die Gruppenarbeit ist super. Der andere Teilnehmer kann dich auf etwas hinweisen, das man selbst nicht merkt. Durch mehrere Gruppen kommt man schneller zum Ergebnis“

Insgesamt wurde von Seiten der Schülerinnen und Schüler festgestellt, dass sich mit den Modellierungsbeispielen der Unterricht deutlich verändert hat.

Auffallend ist, dass sich kaum Veränderungen bzgl. der Studienwünsche seitens der Schülerinnen und Schüler ergeben haben. Dies ist nachträglich gesehen nicht unverständlich, wurde doch in den Veranstaltungen mit Berichten von angewandten Mathematikerinnen und Mathematikern die Berufspraxis thematisiert, nicht jedoch das Studium als solches. Die Erwartung, dass sich durch die Diskussion der Berufspraxis von angewandten Mathematikerinnen und Mathematikern Veränderungen in den Studienwünschen ergeben, war wohl nicht realistisch, vielmehr hätte dazu wohl das Studium selber deutlich im Fokus sein müssen. Auffallend ist in diesem Zusammenhang, dass es allerdings trotzdem eine deutliche Veränderung in den Studienwünschen der Schülerinnen und Schüler gegeben hat weg von den Naturwissenschaften und Informatik hin zur Technik. Eine mögliche Erklärungshypothese könnte sein, dass den Schülerinnen und Schüler durch die durchgeführten Modellierungsbeispiele deutlich wurde, wie interessant technische Fragestellungen sein können.



Abschließend ist festzustellen, dass das Projekt „Modellierung in der Schule“ eine Bereicherung für alle Seiten darstellt. Für die Schulen bedeutet es eine erfolgreiche Erweiterung des herkömmlichen Mathematikunterrichts, für die Studierenden die Möglichkeit, die verschiedenen Teildisziplinen ihres Studiums zu verknüpfen, und für die Professorin bzw. Professoren eine Möglichkeit, zur praxisnahen Anreicherung ihrer Lehre.

Weitere Informationen zu diesem Projekt finden sich unter:

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/struckmeier/Modellierung/>

#### Literatur:

- Blum, Werner (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23. Wien, Hölder-Pichler-Tempsky, S. 15-38
- Ortlieb, Claus Peter 2001: Einige mathematische und methodische Probleme der Fischereiwissenschaft, Handreichung zum Seminar „Modellierung in der Schule“.
- Kaiser, Gabriele 2000: Ziele der Behandlung von Modellierungsbeispielen für die Schülerinnen und Schüler, Handreichung zum Seminar „Modellierung in der Schule“.