Band

2

REGIONALE LEHRERFORTBILDUNG

Bezirksregierung Hannover

Lernwerkstatt Mathematik

Unterrichtsbaustein

Funktionen

Inhaltsverzeichnis

Zusammnengestellt und bearbeitet September 2002

Andreas Koepsell

Einführung in diesen Baustein unter dem Aspekt der veränderten Unterrichtskultur

Als Reaktion auf die OECD-Studien wird vermehrt eine Veränderung der „Unterrichtskultur“ eingefordert. Deutscher MU ist zu sehr an Regeln, Kalkülen und Routinen sowie auf reproduktives Wissen ausgerichtet. Es gibt unübersehbare Hinweise auf mathematikspezifische Ursachen für unzureichende Resultate: inhaltliche Aspekte wie Begriffsvorstellungen, inhaltliches Argumentieren, verständiges Umgehen mit Realsituationen kommen zu kurz im Vergleich zu rein verfahrensbezogenem Vorgehen. Zu wenige Schülerinnen und Schüler sind wirklich aktiv. Statt auf "concepts" ist der deutsche Unterricht zu sehr auf "drills" ausgelegt.

Die Lernwerkstatt Mathematik der Regionalen Lehrerfortbildung Hannover, ein sich regelmäßig treffender Kreis von Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrern, versucht die Anforderungen an eine „neue Unterrichtskultur“ zu formulieren und in Praxis umzusetzen.

Für uns lässt sich die neue Unterrichtskultur wie folgt beschreiben:

- Unterricht wird als komplexes System betrachtet. Einflüsse auf den Unterricht sind nicht analytisch zerlegbar und durch Methoden und Techniken beeinflussbar. Eine ganzheitliche Betrachtung ist notwendig. Lernen ist dadurch der zentrale Punkt.
- Die Lernenden müssen die passive Rolle der Belehrten verlassen und im Sinne aktiver Aneignung Mitverantwortliche des Lernprozesses werden.
- Die Rolle der Lehrenden verschiebt sich von Experten des Fachwissens zu Experten des Lernens. Die Aufgabe besteht darin, die aktive Aneignung zu moderieren.

Der Unterricht muss

- eine Vielfalt unterschiedlicher individueller Zugänge möglich machen,
- Subjektivität beim Lernenden zulassen,
- all zu enge Vorstellungen von Mathematik vermeiden,
- Freiräume zum eigenen Erkunden zulassen und
- Handlungen und Sprechweisen in weniger normierter Form zulassen.

Diese Beschreibung zeigt eine Denkweise auf, sie ist nicht vollständig. Sie kann und wird sich in und durch Praxis weiter verändern.

Die „Lernwerkstatt Mathematik“ hat sich mit dem Thema Funktionen unter dem Gesichtspunkt der veränderten Unterrichtskultur beschäftigt.

Das Thema „Funktionen“ ist eine Kernidee der Mathematik. Die neuen RRL für Integrierte Gesamtschulen nehmen dies in dem roten Faden „Denken in Funktionen und Wechselwirkungen“ auf:

- mit verschiedenen Variablenaspekten (Gegenstandsaspekt, Einsetzaspekt, Kalkülaspekt) zum Beispiel in Gleichungen und Formeln umgehen
- Interpretation und Modellieren von Zusammenhängen
- qualitatives und quantitatives Umgehen mit zwei und mehr Variablen (Formeln); beim Umgang Zuordnungs- und Veränderungsaspekt betrachten
- mit analytisch, rekursiv oder iterativ gegebenen Beziehungen umgehen
- Wechselwirkungen in vernetzten Systemen erkennen

In einem solchen Faden müssen vom Lernenden tragfähige Begriffe entwickelt werden. Ein Grund für das Zerfallen des Wissens in zusammenhanglose Bereiche ist der lineare, elementhaft synthetische Aufbau im Mathematikunterricht, bei dem sich tragfähige „Grundvorstellungen“ nicht nachhaltig entwickeln können. Begriffsentwicklungen erfolgen eher „flächig“, d.h. nicht in einer strengen hierarchisch geordneten linearen Abfolge von Einzelschritten, sondern im Kennenlernen von Begriffsaspekten und deren Vernetzung. Dabei spielen auch subjektive Erfahrungsbereiche auf Schülerseite eine Rolle. Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern entwickeln sich in der Auseinandersetzung von Schüler- und Lehrerkonzepten.

Aufgrund dieser Überlegungen haben wir in der Lernwerkstatt Mathematik gemeinsam als Planungsmittel eine „didaktische Landkarte zum Thema Funktionen“ erstellt.
Solche Lernlandkarten sind visualisierte Formen von didaktischen Strukturen und dienen der Entwicklung von Begriffen. Zentral für das bedeutungshaltige Lernen ist der semantische Bereich, der sogenannte Kern. In ihm werden Grundvorstellungen und grundlegende Verfahren beschrieben, die durch die Tätigkeiten des Unterrichts ausgeprägt werden.
Die Landkarten sind von innen nach außen zu lesen: der bedeutungshaltige, semantische Kern ist von größerer Relevanz als der formale, syntaxgeprägte Rand.
Der Übergang zum syntaktischen Rand, zur formalen Sprache der Mathematik wird für die Lernenden nur dann möglich sein, wenn die Grundvorstellungen im Kern stabil sind.
Eine genaue Betrachtung der didaktischen Landkarte macht deutlich, dass sich bisheriger Unterricht zu sehr - und in einigen Bereichen fast ausschließlich - im Rand aufgehalten hat.

Die Wichtigkeit der erstellten Lernlandkarte liegt in dem gemeinsam von der Fortbildungsgruppe in der Lernwerkstatt Mathematik ausgehandelten und -tarierten Überblick über Kern und Rand. Hier kommt ein weiterer Gesichtspunkt zum Tragen, der zur Qualitätsentwicklung von Unterricht beitragen könnte: die Kooperation (Transparenz, gegenseitige Aufklärung und Kommunikation).

In den Fortbildungssitzungen haben wir konkrete Angebote für den Unterricht zum Thema Funktionen zusammengestellt. Dabei sind vielfältige Anregungen entstanden, die wir unter der Überschrift „Unterrichtsbeispiele“ hier vorstellen. Die Bearbeitungsvorschläge sind teilweise als Aufgaben für Schülerinnen und Schüler gedacht, wurden so eingesetzt und haben sich praktisch bewährt. Teilweise sind es aber auch Aufträge für die Fortbildungsteilnehmer und dann so für Schülerinnen und Schüler zu schwer. Es wird also nicht gehen, die Vorlagen lediglich zu kopieren und in den Unterricht zu geben.
Die Auseinandersetzung mit den Anforderungen einer veränderten Unterrichtskultur macht es notwendig, die Unterrichtsbeispiele selber zu bearbeiten und für die eigene Lerngruppe begründet auszuwählen. Bei dieser Auswahl dürfte weniger manchmal mehr sein - im Sinne von exemplarischem Arbeiten.

Andreas Koepsell, Wilfried Jannack

Lernlandkarte „Funktionen“

Kern (semantischer Bereich)

Grundvorstellungen entwickeln zu den Aspekten...

- Abhängigkeiten erkennen und beschreiben
- Situationen mit Tabellen, Grafen und Wortgleichungen beschreiben
- Graf interpretieren und kritisch betrachten
- Darstellung zweier Größen im Koordinatensystem
- Zuordnungsaspekt: eine Tabelle waagerecht lesen und interpretieren
- Kovariationsaspekt: Tabellen senkrecht lesen und Veränderungen beschreiben

Grundlegende Verfahren

- Wertetabellen erstellen und lesen
- Grafiken zeichnen und beschreiben
- Wertepaare ablesen, besondere Punkte in Grafiken erkennen, beschreiben und ihre Koordinaten ablesen.
- Funktionsgleichungen als Anweisungen zur Berechnung von Wertepaaren verstehen (blackbox, Operatoraspekt)
- einfache rekursive Verfahren zur Berechnung von Wertetabellen durchführen

Funktionstypen optisch unterscheiden und klassifizieren,
Funktionstyp → Funktionsgleichung

Definitionsmenge, Lösungsmenge, Wertebereich
"Was ist eine Funktion, was ist keine Funktion?"
Umkehrfunktionen

Gradengleichungen: Punkt-Steigungs-Form, Normalform, Scheitelpunktsform, Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen, , Aufstellen der Funktionsgleichungen aus der Wertetabelle oder dem Grafen.

f(x) = x → f(x) D(f) W(f) L= {....} y =

Rand (syntaktischer Bereich)

werkstatt: mathematik Garbsen **21.2.2002**

Funktionen untersuchen als durchgängiges Thema der Sekundarstufe I

Der Vortrag basiert auf zwei Aufsätzen von Günther Malle im Mathematik lehren Heft Nr. 103 (Dezember 2000). Der erste ist der Basisartikel "Funktionen untersuchen - ein durchgängiges Thema", als zweites geht es um den Artikel "Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnungen und Kovariation".

Wenn von Funktionsuntersuchungen die Rede ist, denkt man in erster Linie an die traditionellen "Kurvendiskussionen", die üblicherweise im 11. Schuljahr durchgeführt werden.
Doch sind Funktionsuntersuchungen schon viel früher möglich, sie bilden in einem gewissen Sinne sogar einen roten Faden durch die gesamte Schulmathematik. Dieser rote Faden soll hier angedeutet werden.

Von "Funktionsuntersuchung" kann man in einem weiten und in einem engeren Sinne sprechen.

Im weiten Sinne
versteht man unter einer "Funktionsuntersuchung" die Untersuchung einer Abhängigkeit zwischen Größen, wobei dieser Prozess in zwei Teilprozesse zerfällt. **Im ersten Schritt** wird die zu untersuchende Abhängigkeit **dargestellt** (zum Beispiel als Tabelle, Formel, Graf, Flussdiagramm, ...), **im zweiten Schritt** erfolgt eine **Interpretation** dieser Darstellung, das heißt, aus ihr wird Bestimmtes herausgelesen und in der jeweiligen Situation gedeutet.

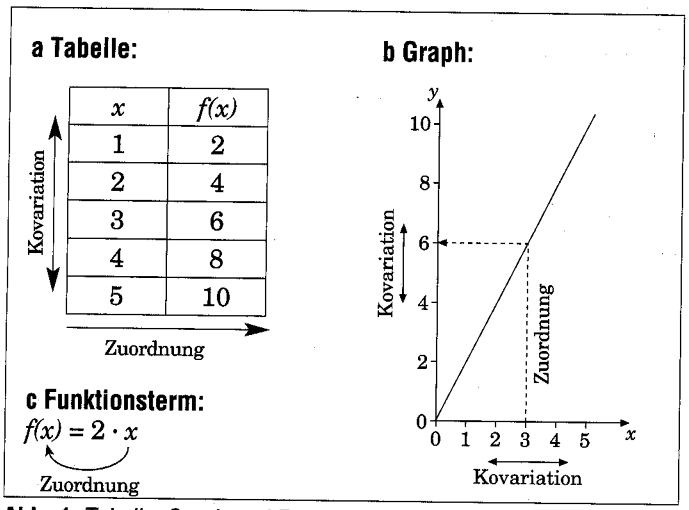


Abb. 1: Tabelle, Graph und Funktionsterm enthalten beide Aspekte

In einem engeren Sinne wird unter einer "Funktionsuntersuchung" **nur der zweite Schritt,** also **die Interpretation** einer vorliegenden Darstellung verstanden.

Malle geht von dem weiten Sinn der "Funktionsuntersuchung" aus.

Schwerpunkte bis zum 8. Schuljahr

Im Schulalltag kommt das Arbeiten mit Tabellen, Formeln und Grafen viel zu selten vor. Schülerinnen und Schüler sollen im Unterricht vor allem lernen

- solche Darstellungen anzufertigen,
- vorliegende Darstellungen in andere zu übersetzen und
- die Darstellungen in der jeweils zugrunde liegenden Situation zu interpretieren (das heißt aus ihnen möglichst viel herauszulesen).

Tabellen können bereits in der Primarstufe behandelt werden, bei Grafen, aber auch bei Formeln plädiert Malle für eine "frühe und progressive" Einführung ab dem 5. Schuljahr.

Im 5. bis 8. Schuljahr ist keine "abstrakte Funktionenlehre" notwendig. Nicht einmal das Wort "Funktion" muss fallen, geschweige "Funktionsuntersuchung".
Es genügt, wenn Abhängigkeiten von Größen in bedeutungshaltigen Situationen (arithmetischen oder geometrischen Situationen, Sachsituationen) untersucht werden. Beispiele sind die Abhängigkeit eines Preises von der Warenmenge, eines zurückgelegten Weges von der Zeit oder des Kreisflächeninhaltes vom Radius.

Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Tabellen, Formeln, Grafen und gegebenenfalls weitere Darstellungen anzufertigen und in der jeweiligen Situation zu interpretieren.
Dies reicht für die Bedürfnisse des Alltagslebens aus, denn im Alltag geht es nicht um abstrakte Funktionen, sondern um Abhängigkeiten inhaltlich deutbarer Größen.
In dieser Phase

- soll der "*semantische Hintergrund*" zum späteren Funktionsbegriff erworben werden,
- der in erster Linie aus *intuitiven Vorstellungen* und
- *vorbegrifflichem Handlungswissen* in Bezug auf Abhängigkeiten besteht.

Erst wenn dieser Hintergrund vorhanden ist, hat es einen Sinn, ab dem 9. Schuljahr eine formalere Funktionenlehre zu entwickeln, in der die auftretenden Variablen nicht mehr zwangsläufig inhaltlich gedeutet werden.
Leider wird einer solchen inhaltlich-semantischen Vorphase in diesem wie in vielen anderen Gebieten der Schulmathematik zu wenig Raum gegeben und es wird meist zu schnell auf eine abstrakt-formale Ebene aufgestiegen.

Welche Defizite treten beim Interpretieren von Grafen auf?

Bilder sind nicht selbst erklärend. Das gilt besonders für Funktionsgrafen. Man muss erst lernen, sie zu lesen. Viele Schülerinnen und Schüler kommen nicht von selbst darauf, wie Funktionsgrafen gemeint sind. Zahlreiche empirische Untersuchungen haben demgemäß große Defizite beim Interpretieren von Funktionsgrafen zutage gefördert.
Ein verbreitetes Missverständnis besteht z. B. darin, dass Funktionsgrafen als fotografische Abbilder von Realsituationen angesehen werden. So meinen etwa viele Schülerinnen und Schüler bei der Zeit-Ort-Funktion eines Autos, dass das Auto eine Linkskurve fährt. Bei dem ähnlich aussehenden Grafen, der das Wachstum einer Bakterienkultur darstellt, passiert ihnen dieser Fehler bezeichnenderweise nicht. Es wäre ja auch zu dumm zu sagen, dass die Bakterien eine Linkskurve machen. Derartige Interpretationsfehler sind also situationsabhängig und werden häufig durch die dargestellte Situation provoziert.
(Der springende Punkt: Ein Funktionsgraf stellt nicht direkt eine Realsituation dar, sondern eine Menge von Zahlenpaaren, die zwischen Realsituation und Graf geschoben wird. Schülerinnen und Schüler, die das nicht erkennen, beziehen den Grafen direkt auf die Realsituation und tappen in eine falsche Deutung hinein.)

Zur Erklärung schildert Malle ein persönliches Erlebnis: Sein Sohn zeigte ihm im Alter von 11 Jahren eine Abbildung aus dem Biologiebuch, in der ein Räuber-Beute-Modell dargestellt ist. Seine Schwierigkeiten mit dieser Figur drückte er so aus: "Ist das so gemeint, dass der Hase Haken schlägt und der Fuchs hinterherläuft?" Den Autoren des Buches war anscheinend nicht bewusst, welche Schwierigkeiten das Lesen von Funktionsgrafen einem Elfjährigen bereiten kann. Erschwert wurde die Interpretation der Grafen noch dadurch, dass die Achsen keinerlei Skalierung aufweisen.
Es war gar nicht leicht, dem Kind die Sache zu erklären. Geholfen hat schließlich das Eintragen von Zahlen auf den Achsen, gefolgt von einem punktweisen Ablesen einzelner Funktionswerte und dem anschließenden Versuch, die Grafen als Mengen von Zahlenpaaren zu interpretieren. Es kommt eben manchmal nur darauf an, dass man den Schülerinnen und Schülern sagt, wie Grafen zu lesen sind, und nicht so tut, als wäre die Fähigkeit zu ihrer Interpretation angeboren.

Zwei Aspekte beim Interpretieren

Eine Funktion ähnelt einer Medaille mit zwei Seiten. Nur wer beide kennt, kann Funktionen sinnvoll untersuchen.

Jede Funktion weist zwei fundamentale Aspekte auf: *Zuordnung:* Jedem x wird genau ein f(x) zugeordnet.
Kovariation: Wird x verändert, so ändert sich f(x) in einer bestimmten Weise und umgekehrt.
Der Ausdruck "Kovariation" (engl. "covariation") ist in der deutschsprachigen Literatur eher unüblich, wird aber in der jüngeren amerikanischen Literatur häufig verwendet. Er drückt meines Erachtens in recht einprägsamer Weise aus, worum es geht, nämlich um ein "Ko-Variieren", das heißt "Miteinander-Variieren" der beiden Variablen. In der deutschen Literatur entspricht dieser Begriff in etwa dem Begriff "Funktionales Denken" im Sinne Felix Kleins beziehungsweise dem Begriff "systematische Veränderung" im Sinne Vollraths.
Beim Zuordnungsaspekt wird die Funktion jeweils nur lokal betrachtet, beim Kovariationsaspekt ist eine globalere Sichtweise der Funktion notwendig.

Wo treten die Aspekte auf?

Typische Fragen zum Zuordnungsaspekt:
- Welches f(x) gehört zu einem bestimmten x?
- Welches x gehört zu einem bestimmten f(x)?

Typische Fragen zum Kovariationsaspekt:
- Wie ändert sich f(x), wenn x wächst?
- Wie muss sich x ändern, damit f(x) fällt?
- Wie ändert sich f(x) , wenn x verdoppelt wird?
- Wie muss x geändert werden, damit sich f(x) verdreifacht?
- Wie ändert sich f(x) , wenn x um I erhöht wird?
- Wie muss x geändert werden, damit f(x) um 2 erniedrigt wird?

Beide Aspekte sind praktisch immer präsent. Man kann sie an jeder Darstellung einer Funktion erkennen - manchmal besser, manchmal schlechter. Man kann etwa eine Tabelle "waagerecht" (zeilenweise) lesen und kann dabei für jedes x das zugeordnete f(x) ermitteln (Zuordnungsaspekt). Man kann sie aber auch "senkrecht" (spaltenweise) lesen und dabei ermitteln, wie sich f(x) verändert, wenn sich x in einer bestimmten Weise ändert (Kovariationsaspekt). Auch an einem Grafen kann man einerseits für ein bestimmtes x das zugeordnete f(x) ablesen (Zuordnungsaspekt), andererseits kann man aber auch erkennen, wie sich f(x) ändert, wenn sich x in bestimmter Weise ändert (Kovariationsaspekt). Sogar an einer Formel können Geübte beide Aspekte erkennen. Allerdings ist nur der Zuordnungsaspekt direkt zu sehen, der Kovariationsaspekt muss indirekt erschlossen werden. Hier sind einige typische Fragestellungen aufgeführt, die jeweils auf einen dieser beiden Aspekten abzielen:

Verfügbarkeit beider Aspekte durch Schülerinnen und Schüler

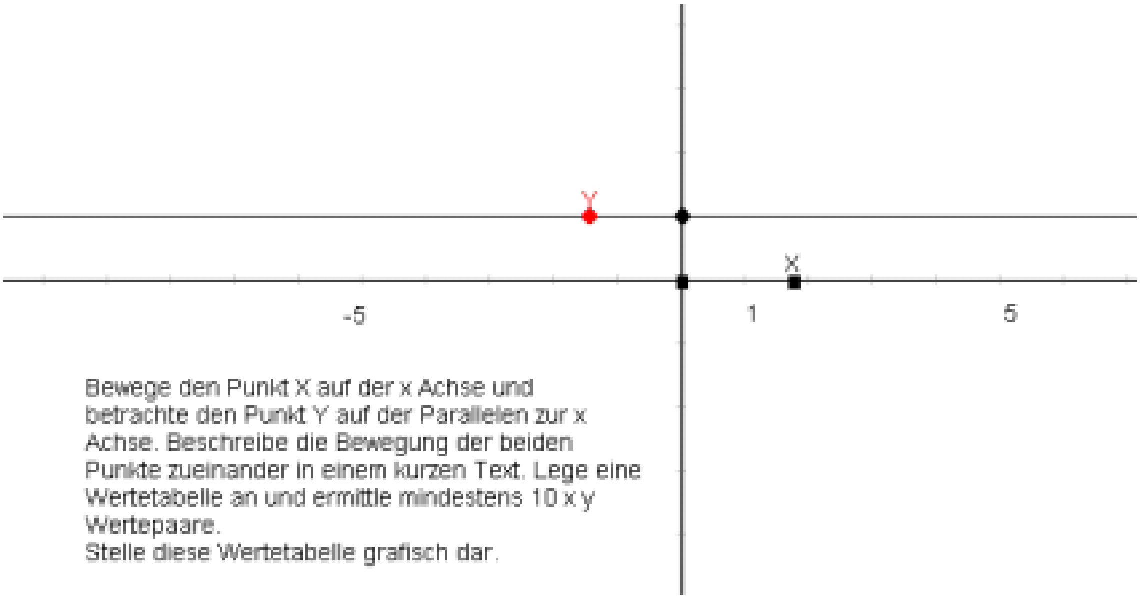
Es ist bemerkenswert, dass in der üblichen Definition einer Funktion nur der Zuordnungsaspekt hervorgehoben wird. Man definiert ja: Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element x einer Menge A genau ein Element f(x) einer Menge B zuordnet. Von Kovariation ist hier nicht die Rede. Für einen formalen Aufbau der Mathematik reicht dies aus. Für das praktische Arbeiten mit Funktionen ist der Kovariationsaspekt jedoch unentbehrlich. Wer diesen Aspekt nicht kennt und nur das weiß, was die Definition einer Funktion ausdrückt, kann in der Praxis mit Funktionen so gut wie nichts anfangen.

Empirische Untersuchungen zeigen jedoch, dass im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt unterentwickelt sind. Besondere Defizite sind in Hinblick auf den Kovariationsaspekt zu verzeichnen, der oft so gut wie nicht verfügbar ist.
Eine dieser Untersuchungen soll [Andrea Pummer (2000)] etwas ausführlicher dargestellt werden. Versuchspersonen im Alter von 11 bis 22 Jahren wurden aufgefordert, verschiedene auf Kärtchen gezeichnete (lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Polynomfunktionen, rationale Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen) Funktionsgrafen spontan zu beschreiben, ohne Termdarstellungen für diese Funktionen bekannt zu geben. Es zeigte sich, dass die 11- bis 14-Jährigen vorwiegend optisch ins Auge springende Äußerlichkeiten der Abbildungen beschrieben (zum Beispiel die Gestalt des Koordinatensystems oder auffällige Kurvenformen wie eine Welle) und meist weder auf den Zuordnungsaspekt noch den Kovariationsaspekt Bezug nahmen. Die 15- bis 18-Jährigen (mit gewissen Schwierigkeiten auch schon die 14-Jährigen) konnten meist zu gegebenen Argumenten die Funktionswerte und umgekehrt ablesen, waren aber häufig nicht imstande, das Verhalten der Funktion globaler zu beschreiben (etwa mit Wachsen oder Fallen in bestimmten Bereichen). *Der Zuordnungsaspekt war also bei den meisten Versuchspersonen ab 14 Jahren vorhanden, während der Kovariationsaspekt bei vielen immer noch fehlte.* Bei Studierenden der Mathematik an der Universität im Alter von 18 bis 22 Jahren waren die Ergebnisse besser, bei Studierenden anderer Fächer jedoch ähnlich.
Jede Funktion war in zweifacher Weise auf Kärtchen gezeichnet, einmal in einer situativen Einkleidung (die den Versuchspersonen erläutert wurde), das andere Mal ohne jegliche Einkleidung als abstrakte Funktionsdarstellung. Zum Beispiel wurde eine Exponentialfunktion im ersten Fall als Zunahme des Flächeninhaltes einer Zellkultur gedeutet, wobei die Achsen entsprechend beschriftet wurden, im zweiten Fall wurde derselbe Graf ohne Einkleidung in einem x-f(x)-Koordinatensystem dargestellt.
Es zeigte sich sehr deutlich, dass die Versuchspersonen im Falle einer situativen Einkleidung eher den Kovariationsaspekt aufgriffen als im abstrakten Fall. Zum Beispiel beschrieben sie den jeweiligen Grafen im ersten Fall eher mit Termini wie "Wachsen", "Fallen", "Zunehmen", "Abnehmen", "Höhepunkt", "Verdoppeln", "rasches Ansteigen", "langsames Abnehmen", während im zweiten Fall solche Beschreibungen kaum vorkamen. Man kann daraus folgern, dass der Kovariationsaspekt in situativen Einkleidungen leichter erwerbbar ist als im Rahmen einer abstrakten Funktionenlehre (am leichtesten geht es bei zeitabhängigen Größen).
Was also hier im 5. bis 8. Schuljahr versäumt wird, ist ab dem 9. Schuljahr nur mehr schwer aufzuholen. Diese sowie ähnliche Untersuchungen unterstreichen die Wichtigkeit, im 5. bis 8. Schuljahr dafür zu sorgen, dass sich im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt entwickelt - und zwar im Zusammenhang mit inhaltlichen Interpretationen von Funktionsgrafen. Fehlen diese Aspekte, wird jede Weiterarbeit in einer abstrakten Funktionenlehre ab der 9. Klasse nur ein "sinnleeres Gerede ohne intuitiven Hintergrund".

Wilfried Jannack

Kovariationsaspekt im Unterricht

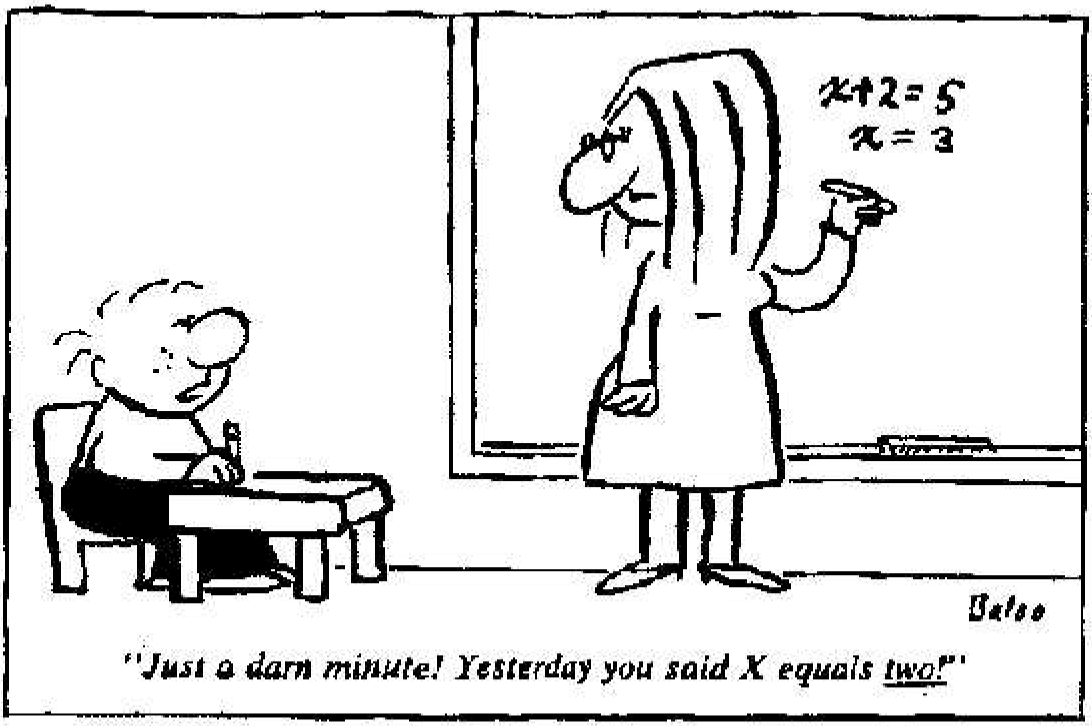
In dem Artikel von Wilfried Jannack wird der Begriff der Kovariation erläutert. Dieser Aspekt betrachtet die dynamische Abhängigkeit und Veränderung zweier Größen. Dies wird mit DynaGeo folgendermaßen dargestellt: Auf zwei parallelen Geraden befinden sich die beiden Punkte X und Y . Der Punkt X auf der unteren Geraden kann bewegt werden. Y bewegt sich dann auf der oberen Gerade in Abhängigkeit von X.
Diese Abhängigkeit soll im Text beschrieben werden. Danach wird n eine Wertetabelle aufgestellt und die Funktionsgrafen gezeichnet.



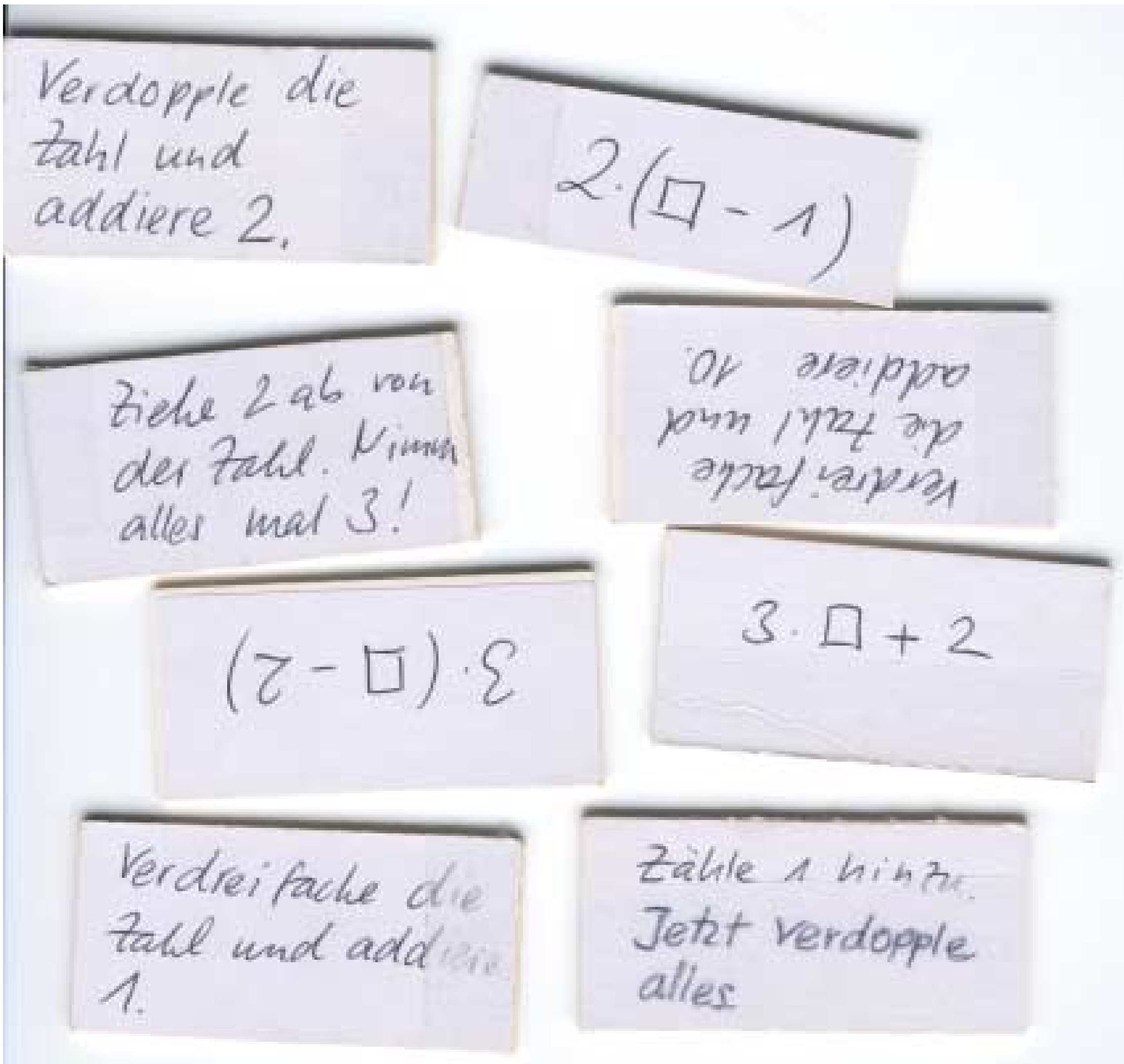
Diese Idee wurde in „**mathematiklehren**“ Heft 103 schon beschrieben und auch mit DynaGeo-Dateien entwickelt. Da bei diesen Arbeitsaufträgen die Schülerinnen und Schüler in der Regel nicht konstruieren sollen, sind das Programm DynaGeo und die Konstruktionselemente überflüssig.

Ich habe eine HTML Datei erstellt. Innerhalb dieserer Datei bleiben die dynamischen Eigenschaften erhalten. Schüler / Schülerinnen können verschiedene Beispiele aufrufen, die Veränderungen betrachten und Tabellen und Grafen erstellen. Die Seiten nutzen ein Java-Applet, dass beim ersten Aufruf mit geladen werden muss. Daher sind auch beim ersten Aufruf längere Ladezeiten zu erwarten.
Das gesamte Paket kann auch als „gezippte“ Datei geladen werden. Das Dateiensystem kann man in das Schulnetz stellen. Diese Arbeitsaufträge sind sofort mit jedem Browser einsetzbar.
Internetadresse: www.erz.uni-hannover.de/~koepsell/start.html

Andreas Koepsell



Funktionsmaschine bauen



aus den Rahmenrichtlinien (neu) "Denken in Funktionen und Wechselwirkungen" Stufe 5/6:

- **Ich rechne aus, was du nicht weißt**

  Partnerweise eine Funktionsmaschine (z.B. Pappwand mit Ein- und Ausgabeschlitz) erstellen; Zahlen werden durch den Eingabeschlitz gegeben, nach einem ausgedachten Funktionsterm verändert und durch den Ausgabeschlitz zurückgeschickt; der Funktionsterm wird bestimmt.

Das habe ich in **Klasse 5** durchgeführt im Rahmen von Klammerrechnen etc. Dazu muss man keine Blackbox bauen, das geht auch ohne. Man kann auch schon mal äquivalente (= sprachlich formulierte) Karten mit dazu nehmen. Das ist eine kleine Sache für ein oder zwei Stunden und für A/Ü-Stunden.

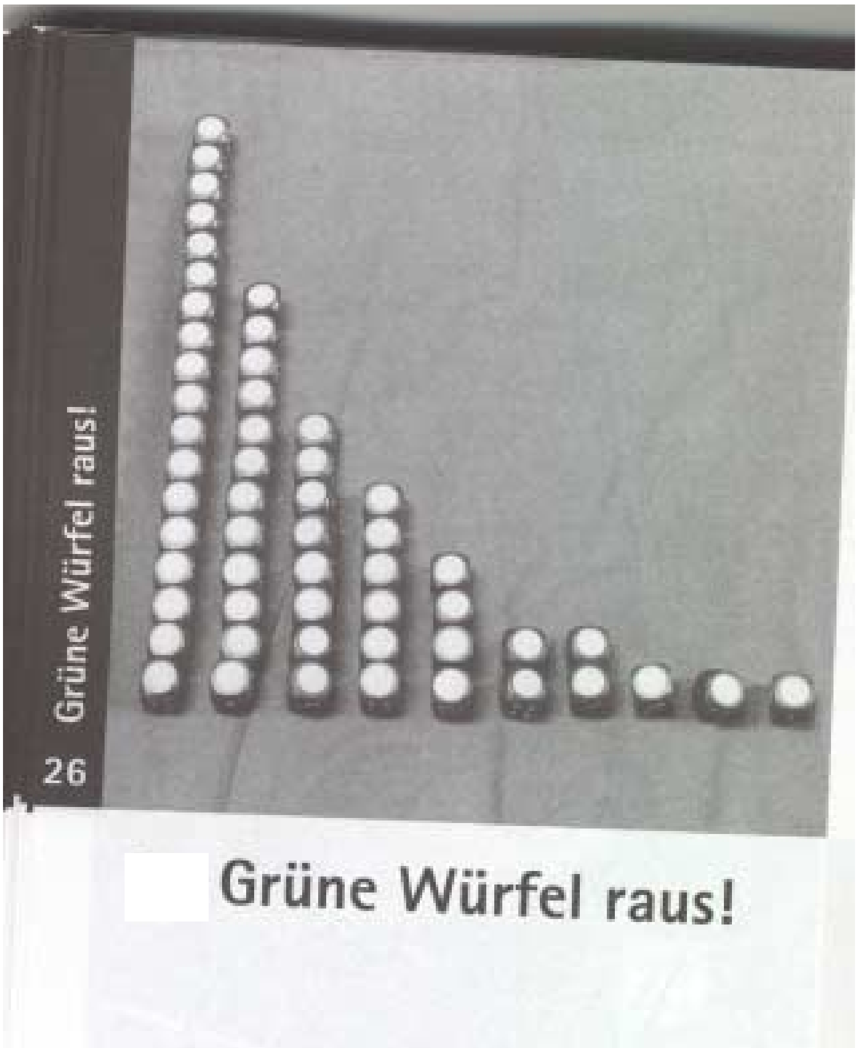
Wilfried Jannack

King Kong Tipp

www.acdca.ac.at : Es meldet sich das Austrian Center for Didactics of Computer Algebra. Dort gibt es für die Jahrgänge 8 und 10, die in Österreich 4. und 6. Klasse heißen, Material zu Funktionen bzw. zu Potenzen und Wurzeln. Pfad: Neue Materialien / Neue Lernkultur 4. Klasse, Stationenbetrieb: Einführung in die Funktionenlehre /Neue Lernkultur 6. Klasse, Stationenbetrieb: Potenzen und Wurzeln Daraus stammt u.a.: Könnte es KING KONG wirklich geben? (Stat 33) (Tipp von Werner Schlüter).

Grüne Würfel raus

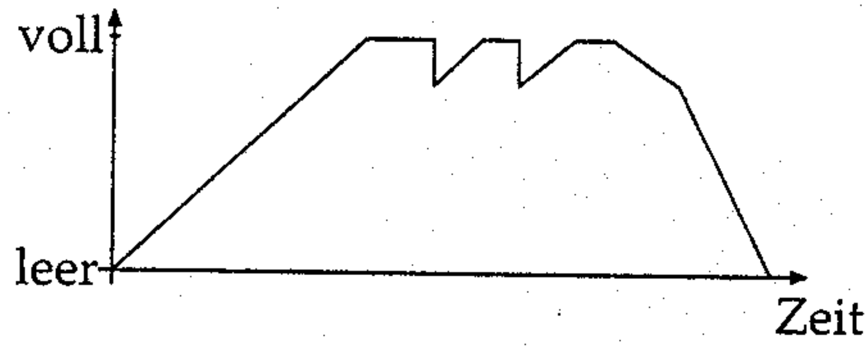
Das ist aus Beutelspachers 'Mathematik-zum-Anfassen'-Ausstellung (Katalog 1, S.26)



Auf dem Tisch liegen 40 bis 50 Würfel, bei denen jeweils zwei der sechs Flächen grün beklebt sind. Weiterhin sind Fächer aufgezeichnet, in die die Würfel einsortiert werden sollen. Der Besucher mischt die Würfel gut durch und verteilt sie auf dem Tisch. Dann werden alle Würfel aussortiert, die mit einer grünen Seite nach oben zeigen und ins erste Fach gelegt. Die übrigen Würfel werden noch einmal durchgemischt. Wieder werden alle grünen Würfel aussortiert und ins nächste Fach gelegt. Das Experiment wird so lange wiederholt, bis alle Würfel einsortiert sind.

Hintergrund:
Ein stochastischer Zugang zu Funktionen. Die Würfel formen eine Kurve, die Exponentialkurve. Jede Reihe sollte ca. 2/3 so hoch wie die vorherige sein.
Die Aufgabe ist ein Plädoyer dafür, das Thema "Wachstum" durchaus vor Klasse 10 mal mit einzubauen (**Stationenlernen in Klasse 7 und 8?**)
Wir hatten das in der Fortbildung mit zweifarbigen Plättchen ausprobiert und wieder verworfen, weil die sich nur selten drehen beim Herausfallen aus dem Würfelbecher.

Badewannen-Geschichten



Das Schaubild beschreibt den Wasserstand in einer Badewanne. Erfinden Sie eine passende „Story" dazu!

Die Aufgabe ist gut einsetzbar im 8. Jahrgang.
Die unten abgebildete Bearbeitung stammt aus einem Lehrerfortbildungskurs.

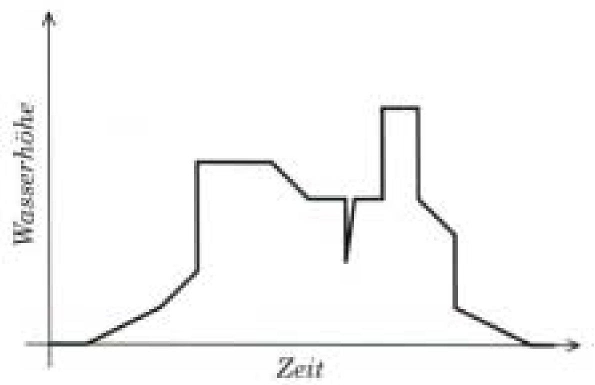
<u>Badewanne</u>

Heinz lässt Wasser in die Wanne einlaufen und vergisst es, die Temperatur zu überprüfen. Oh Schreck, das Wasser läuft längst durch den Überlauf. Er greift einen Eimer und entnimmt abrupt 10 Liter Wasser aus der Wanne. Der Hahn ist zu heiß. Er kann ihn nicht anfassen.
"Wenn das einer sieht, diese Verschwendung." In Panik noch einen Eimer raus. Nach dem Stöpsel angeln. Womit? Endlich liegt der Stöpsel neben dem Abfluss.
Tuch suchen, um endlich den Hahn abzudrehen. Solange fließt oben Wasser zu und unten noch mehr Wasser ab. Das Tuch ist gefunden. Der Hahn ist zugeschraubt.
Ach je, keine Lust mehr zum Baden. Beim Duschen verbraucht man sowieso nicht so viel Wasser.

aus: Mathematik lehren Nr. 68

Badewannen-Geschichten

Quelle (aber Abänderung des ursprünglich gegebenen Graphen):
Herget, Wilfried: Die etwas andere Aufgabe. In: mathematik lehren 68 (1995), S.67 (nach Anregungen aus dem Shell Centre Nottingham)



Dieser Graph beschreibt den Wasserstand in einer Badewanne.
Erzähle eine Geschichte dazu.

Auch hier sind wieder Umkehraufgaben möglich:
Die Schüler erfinden selber eine Geschichte und stellen dann den Graphen dazu auf (evtl. in GA).

Eignung:

- evtl. als Einstieg oder
- später zur Wiederholung von Zuordnungen
- begründete Beschreibung des Graphen einer Zuordnung und ihrer Eigenschaften
- Modellierung
- Gruppenarbeit

Fußball und Mathematik

Dass Mathematik unverzichtbar ist, weiß ja jeder – auf jeden Fall jeder Mathelehrer – aber dass auch Fußballprofis nicht darauf verzichten können, sich mit der Mathematik zu beschäftigen, ist für den einen oder anderen doch neu. Mit dieser Materie beschäftigt sich ein Mathearbeitspaket, dass aus Video, Arbeitsblättern und Statistikmaterial besteht. Hier zwei Beispiele, wie das Thema *Funktionen* behandelt wird:

Zwei Spieler sind gegeneinander aufgestellt. Zu Spielbeginn läuft Spieler A 40 m in 4,3 Sekunden und Spieler B in 4,5 Sekunden. Beide werden im Spielverlauf langsamer. Die Zeit von Spieler A nimmt graduell um etwa 3% seiner Ursprungszeit je 10 Minuten Spielverlauf zu (also ca. 0,13 sec). Bei Spieler B sind es nur ca. 2% (d.h. 0,09 sec) je 10 Minuten Spielverlauf.
Als Aufgaben lassen daraus Funktionen entwickeln, Fragen nach der Geschwindigkeit zu bestimmten Zeiten – z.B. in Tabellenform – oder aber nach dem Zeitpunkt, an welchem beide die gleich Geschwindigkeit haben, stellen, man kann die Funktionen im Koordinatensystem darstellen, usw. Interessant ist auch die Überlegung, wie ein Zusatztraining des einen Spielers seine Zeiten verbessert und somit auch die Chancen, den Ball zu behalten, beeinflusst.

Eine andere Aufgabe beschäftigt sich nur mit dem Training der Schnellkraft:
Ein Fußballer läuft derzeit im Training 100 m in 12,38 Sekunden. Sein Trainer prophezeit, dass er die gleiche Distanz in 11,95 Sekunden laufen wird, wenn er sein Training 30 Tage fortsetzt. Hier sind Koordinatensystem, aufstellen von Funktionsgleichungen, Ablesen bestimmter Zeiten, Vergleich mit anderen Spielern interessante Ansatzpunkte für Aufgabenstellungen. Auch kann man an dieser Aufgabe gut erkennen, dass lineare Funktionen in der Trainingslehre ihre Grenzen haben (Nach 210 Tagen würde er 9,37 sec auf 100 m brauchen!).

Solche Aufgaben kennt natürlich schon jeder, sie sind im Grunde nichts neues für die Lehrerwelt.

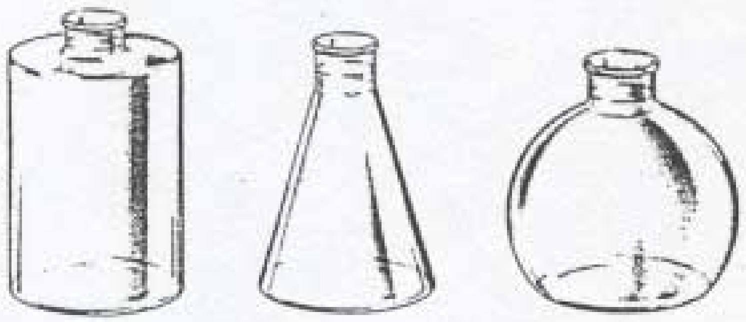
Doch ein paar Aspekte lassen diese Aufgaben interessant werden:
- Fussball ist für viele Schüler motivierend.
- die Aufgaben lassen sich vom Sportunterricht, Matheunterricht und besonders Projektunterricht aus angehen.
- das Paket umfasst nicht nur Algebraaufgaben, sondern auch Problemstellungen aus der Geometrie, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Damit wären die Funktionen in eine komplexe Einheit, die viel Zeit zum Ausprobieren und „Kicken" ließe, eingebaut. Für einen Mathe- und Sportlehrer genau das Richtige – für die Schüler ganzheitlich!

Die Beispiele sind aus dem Projektpaket „Mathe+Fußball" von Sharp Tack Productions, das 49,00 Euro kostet und bei Barbara Sander, Telefon 02131/316337 zu bestellen ist.

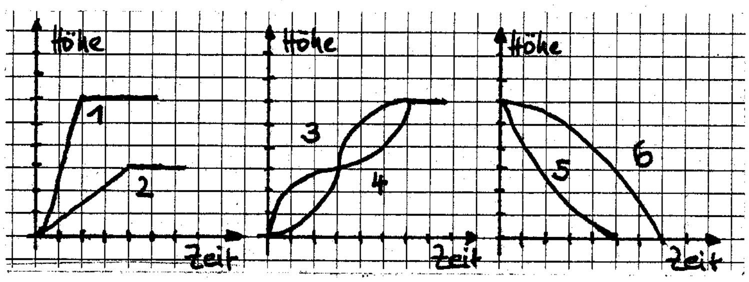
Füllgrafen

In verschiedene Flaschen fließt gleichmäßig Wasser. Zeichne die Füllkurven, die die Füllhöhe der Flaschen anzeigen.



aus: Schnittpunkt 8, S. 151

I Die Sprache der Graphen

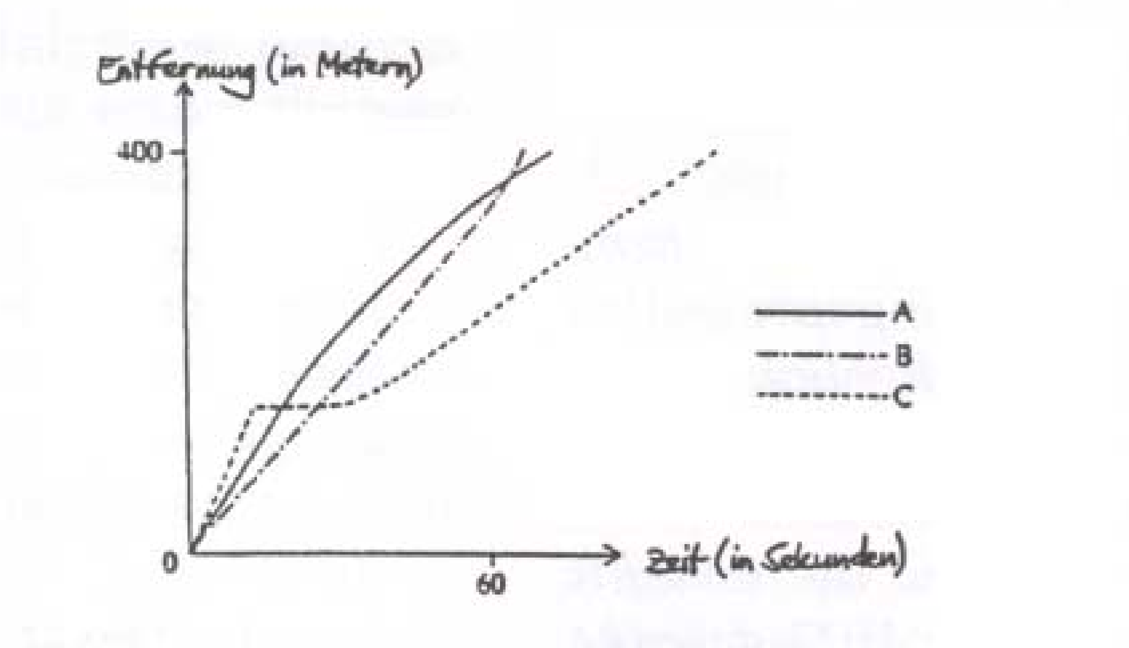


Sechs verschiedene Gefäße werden mit gleichmäßig zulaufendem Wasser gefüllt bzw. laufen durch einen Riss am Boden aus. Die Schaubilder zeigen, wie die Wasserhöhe in den Gefäßen 1 bis 6 steigt bzw. sinkt. Beschreibe, wie sich die Wasserhöhe in den Gefäßen jeweils ändert.
Wie könnten die Gefäße aussehen?

aus: Vorabdruck Mathe live 8, S.95

Wir hatten dazu 1999 mit Andreas Meisner sehr konkret gearbeitet. Leider habe ich diese Unterlagen nicht mehr.

400-m-Lauf



- Die drei Grafen beschreiben für 3 Läufer (A, B und C) den Verlauf eines 400-m-Rennens. Stell dir vor, du bist Sportreporter. Schreibe einen kurzen Bericht, in dem alle entscheidenden Phasen des Rennens vorkommen. Du brauchst dabei keine genauen Werte abzulesen.

Klasse 8:
Die Aufgabe erfordert eine komplexe Modellierung. Nichttriviale Rückinterpretation.

aus: Jordan/Wiegand/Blum, Tests als Hilfe zur Selbstevaluation, in: mathematiklehren 107, August 2001 (Leistungen bewerten)

Abbrennen von Kerzen

Versuchsanleitung: Untersuchung des Abbrennverhaltens einer Kerze

Gehe vorsichtig mit der Kerze um, da sie beim Umfallen <u>sehr schnell</u> auf etwas Brennbares fallen und leicht brechen kann.

Materialien:
Zylinderförmige Geburtstagskerze, Heftwachsscheiben, feuerfeste Unterlage, Stoppuhr

Durchführung:

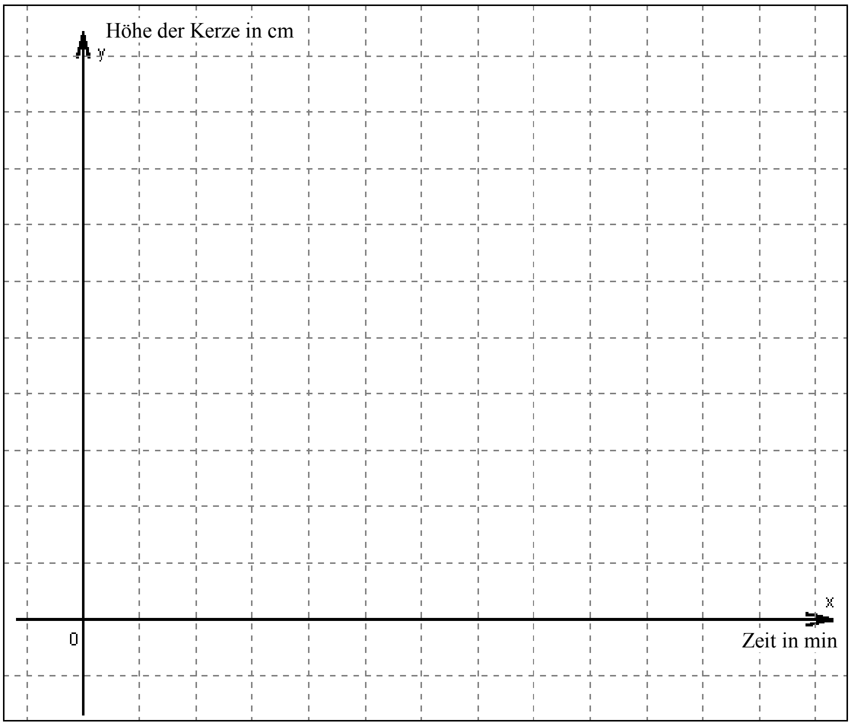
1. Räume alle Sachen von deinem Arbeitsplatz, bis auf diesen Zettel und einem Stift.
2. Zeichne mit dem Folienstift auf der Kerze eine genaue Skalierung ein, die dir das exakte Ablesen von bis zu 1 mm möglich macht.
   Fange dabei von oben an (ab dem geraden Stück) zu messen!
3. Befestige für diesen Versuch die Kerze auf der feuerfesten Unterlage mit Hilfe der Heftwachsscheibe. Achte dabei darauf, dass du die Skalierung gut lesen kannst.
4. Zünde die Kerze an und führe deine Messungen durch. Fülle dabei die Wertetabelle aus.
5. Lass die Kerze insgesamt 4 Minuten brennen. Puste sie vorsichtig aus.

Aufräumen:

Lass die Kerze abkühlen und stelle sie dann mit der feuerfesten Unterlage auf dem Lehrertisch ab. Räume die restlichen Sachen weg.

Beobachtungen:

x Zeit [min]	y Kerzenhöhe [cm]
0	
0,5	
1,0	
1,5	
2,0	
2,5	
3,0	
3,5	
4	



Aufgabe:

Versuche aus den Werten die Gesamtbrenndauer vorherzusagen.
Dabei kannst du auch das Koordinatensystem benutzen; achte auf eine sinnvolle Einteilung.

Hund und Auto

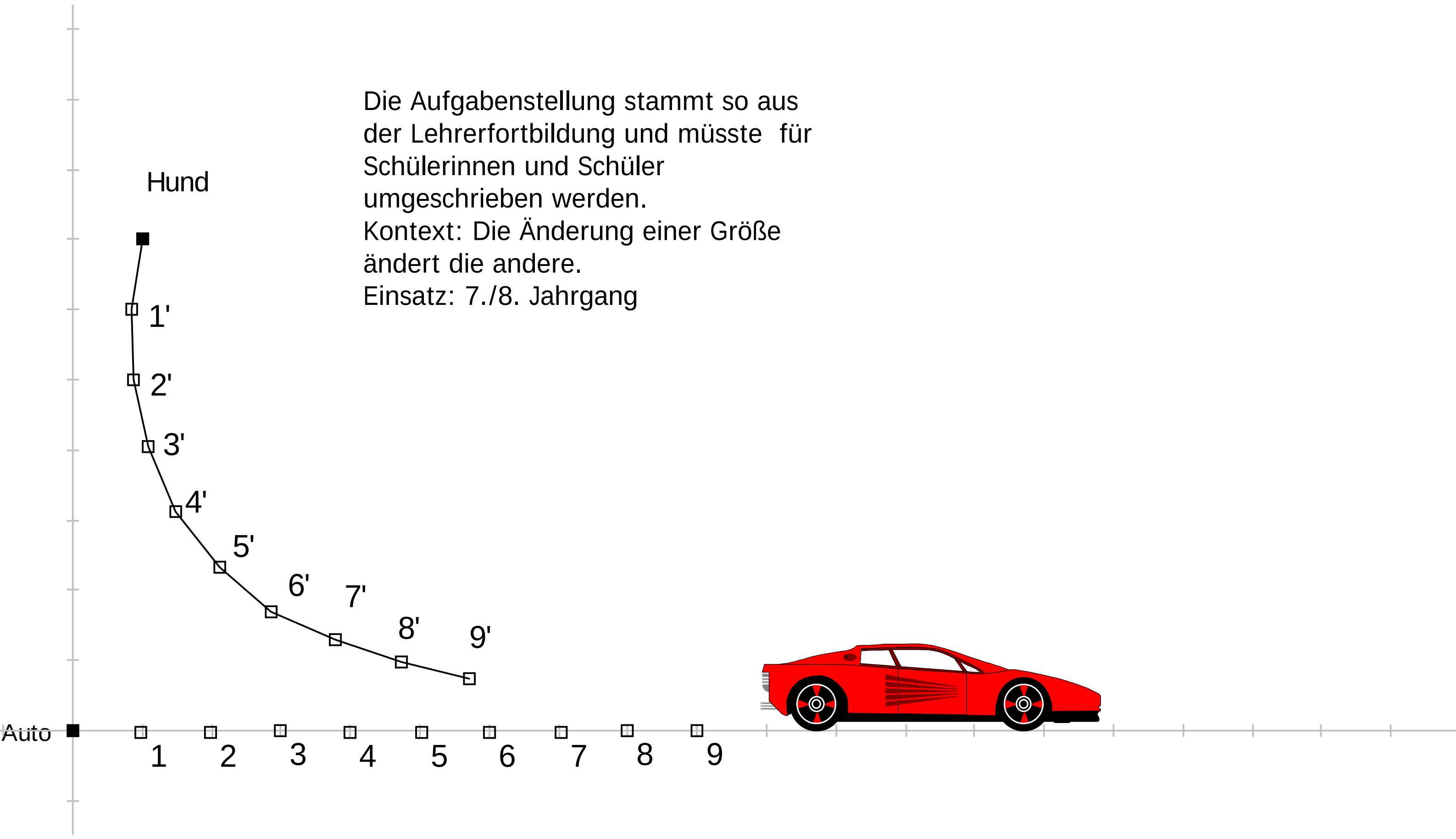
Im ersten Quadranten eines Koordinatenkreuzes in P (1/7) sitzt ein junger, verspielter Hund, der seinem Herrchen hinterher rennt. Der startet im Ursprung mit seinem Auto und fährt die x-Achse entlang.

Der Hund hat die gleiche Geschwindigkeit wie das langsam fahrende Auto: 1 Einheit pro Zeiteinheit. Immer wenn der Hund eine Einheit gelaufen ist, so richtet er sich nach dem neuen Standort des Autos aus. Daran sieht man, wie jung der Hund noch ist.

- ➤ Frage an Erwachsene: Schätze vorher ab, was für eine Kurve bei dem Hund-Auto-"Rennen" entsteht.
- ➤ Zeichne das auf.
- ➤ Variiere die Richtung des Autos und untersuche, wann der Hund das Auto erreicht.

- ➤ Variiere die Geschwindigkeiten.

Die Aufgabenstellung stammt so aus der Lehrerfortbildung und müsste für Schülerinnen und Schüler umgeschrieben werden.
Kontext: Die Änderung einer Größe ändert die andere.
Einsatz: 7./8. Jahrgang



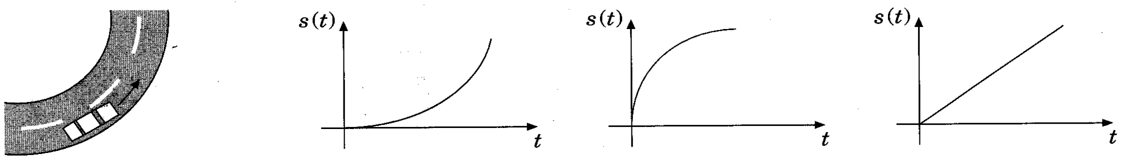
Vom Fotograf zum Funktionsgraf

KOPIERVORLAGE 1

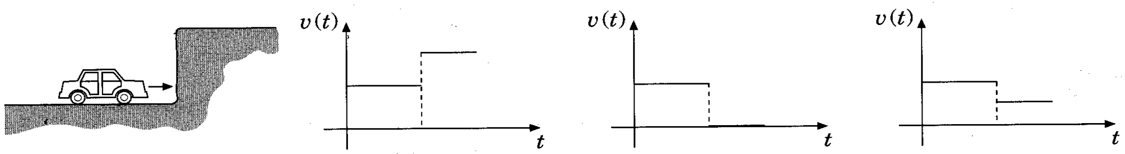
Welcher Funktionsgraph passt?

► *In den folgenden Aufgaben ist im Bild jeweils eine bestimmte Situation dargestellt. Daneben sind einige Funktionsgraphen gezeichnet. Welcher Graph beschreibt die jeweilige Situation am besten?*

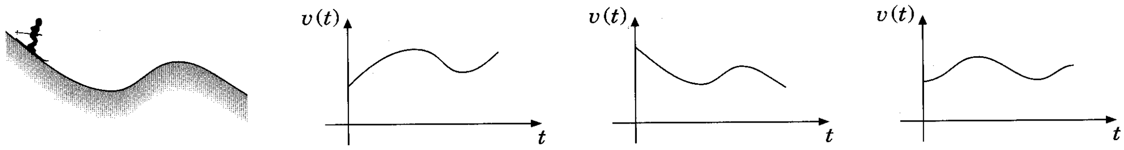
1. Das Auto bewegt sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit. Der Funktionswert *s(t)* gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt *t* an.



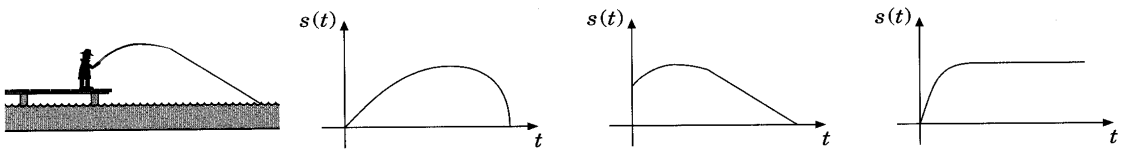
2. Das Auto fährt in die angegebene Richtung. Der Funktionswert *v(t)* gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt *t* an.



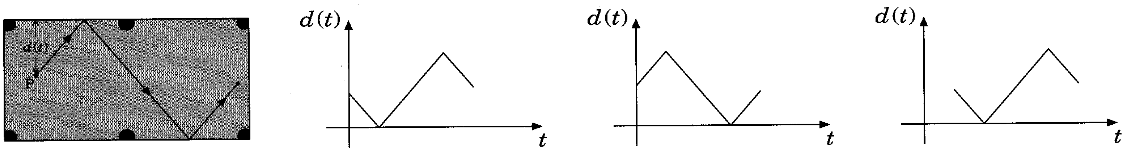
3. Der Skifahrer fährt den Hang hinunter. Der Funktionswert *v(t)* gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt *t* an.



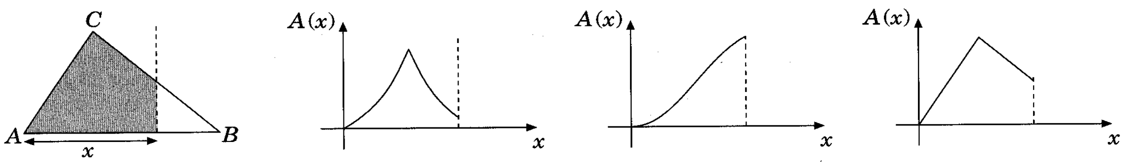
4. Der Angler wirft die Angel vom Stegrand aus ins Wasser. Der Funktionswert *s(t)* gibt die waagerechte Entfernung des Angelhakens vom Stegrand zum Zeitpunkt *t* an.



5. Vom Punkt *P* aus wird eine Kugel auf einem Billardtisch längs der angegebenen Bahn geschossen. Der Funktionswert *d(t)* gibt den Abstand vom oberen Rand der Tischfläche an.



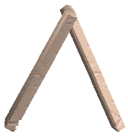
6. Die gestrichelte Linie wird vom Punkt *A* aus um die Entfernung *x* nach rechts gezogen. Der Funktionswert *A(x)* gibt den Inhalt der grau unterlegten Fläche an, wenn die gestrichelte Linie die Entfernung *x* vom Punkt *A* erreicht hat.

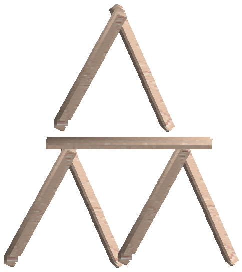


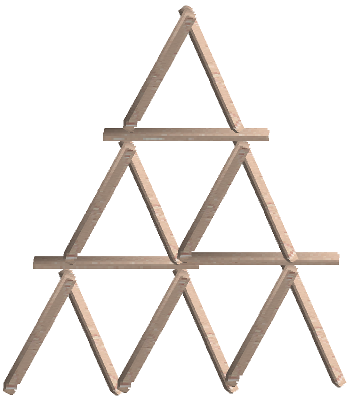
aus: Mathematik lehren Heft 103/2000

Kartenhäuser

Mit quadratischen Bierdeckeln lassen sich leicht Kartenhäuser aufbauen. Dabei können mit diesen Kartenhäuser verschiedene Stockwerke gebaut werden. Im folgenden sind einige Ansichten von der Seite zu sehen.







Stockwerke	Anzahl der Karten
1	2
2	7
3	
4	
5	
6	

<u>Aufgabe:</u>

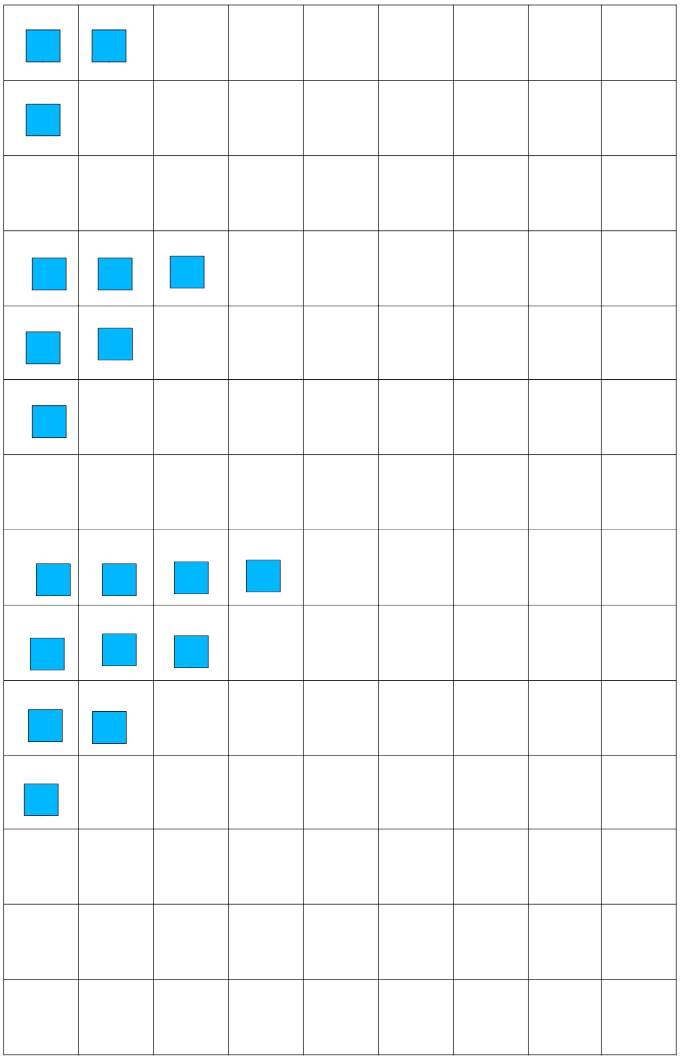
Vervollständige die Tabelle. Wenn nötig skizziere die nächsten Kartenhäuser.

Versuche in einer Wortgleichung und in einer Formel zu beschreiben, wie sich die Anzahl der benötigten Karten in der nächsten Zeile berechnen läßt.

Versuche eine Zuordnungsvorschrift für die aufgestellte Tabelle zu finden.

Dreieckszahlen

In einem Quadratgitter lassen sich drei benachbarte Kästchen zu einem Dreieck verbinden. Nun vergrößert man schrittweise dieses Dreieck und zählt die verwendeten Kästchen aus. Man erhält eine Zuordnungstafel für die Dreieckszahlen:



Nummer	Anzahl der Felder
1	1
2	3
3	
4	
5	
6	
7	

Aufgabe:

Vervollständige die Tabelle. Wenn nötig, skizziere die nächsten Dreiecke.

Versuche in einer Wortgleichung und in einer Formel zu beschreiben, wie sich die Anzahl der benötigten Felder in der nächsten Zeile berechnen lässt.

Versuche eine Zuordnungsvorschrift für die aufgestellte Tabelle zu finden.

Bahncard

Wann lohnt sich die BahnCard ?

Preissystem: *(Stand: 1.5.2000)*

„Normaler Fahrpreis":

2. Klasse	**27,2 Pf/km**	*(Fernverkehr ab 101 km)*
1. Klasse	**40,8 Pf/km**	*(Fernverkehr ab 101 km)*

Die Fahrpreise werden auf volle DM gerundet.

Bahn Card Teen

(12 - 17 Jahre)	**2.Klasse**	**65 DM**
	1.Klasse	**130 DM**

Die Bahn Card halbiert den normalen Fahrpreis und gilt 1 Jahr an allen Tagen in Deutschland.

Aufgabe:

1. Berechne die Fahrpreise für folgende Strecken jeweils *ohne* und *mit* Bahn Card Teen !

		ohne BC	*mit* BC
a) Rotenburg - Frankfurt a.M.	165 km		
b) Rotenburg - Berlin	430 km		
c) Rotenburg - Hamburg	360 km		
d) Rotenburg - Garmisch	520 km		
e) Rotenburg - Freiburg	415 km		

2. Notiere für die Funktionen
   a) Streckenlänge x *(in km)* → Fahrpreis ohne Bahn Card *(in DM)*
   b) Streckenlänge x *(in km)* → Fahrpreis mit Bahn Card *(in DM)*
   die entsprechenden **Funktionsgleichungen:**

   a) ____
   b) ____

   Zeichne die **Graphen** der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem !

3. Ab welcher Streckenlänge lohnt sich die Bahn Card Teen ?
   (Begründe !)

Die Umfanier & die Teiumfaner

nach einer Idee von Heiko Knechtel in "Problemorientierter MU in den Klassen 7 bis 10 des Gymnasiums" NLI-Berichte Nr.59/ 1996 im Kontext quadratische Funktionen (also **Klasse 9)**

Der Spion bei den Umfaniern

Bei den Umfaniern hat sich ein Spion eingeschlichen, der naturgemäß schlecht zu erkennen ist, aber unbedingt demaskiert werden muss.
Die Figuren müssen zunächst ausgeschnitten werden.

<u>Satz vom Brett</u>
Alle Umfanier sollen sich so stellen, dass sie mit der rechten Schulter die Ecke des Raumes* berühren. Man kann dann über die linken Schulterecken der Umfanier ein gerades Brett** legen, das von allen freien Eckpunkten berührt wird. Für den Spion gilt das nicht.
* Hoch-Achse im Koordinatensystem
** eine Gerade

Alle Umfanier haben die Eigenschaft, dass ihr Umfang gleich groß ist. Man kann also noch weitere Umfanier hinzuerfinden.

➤ Wie kann man die Kennlinie genauer beschreiben?

Zusätze
Die Teiumfaner

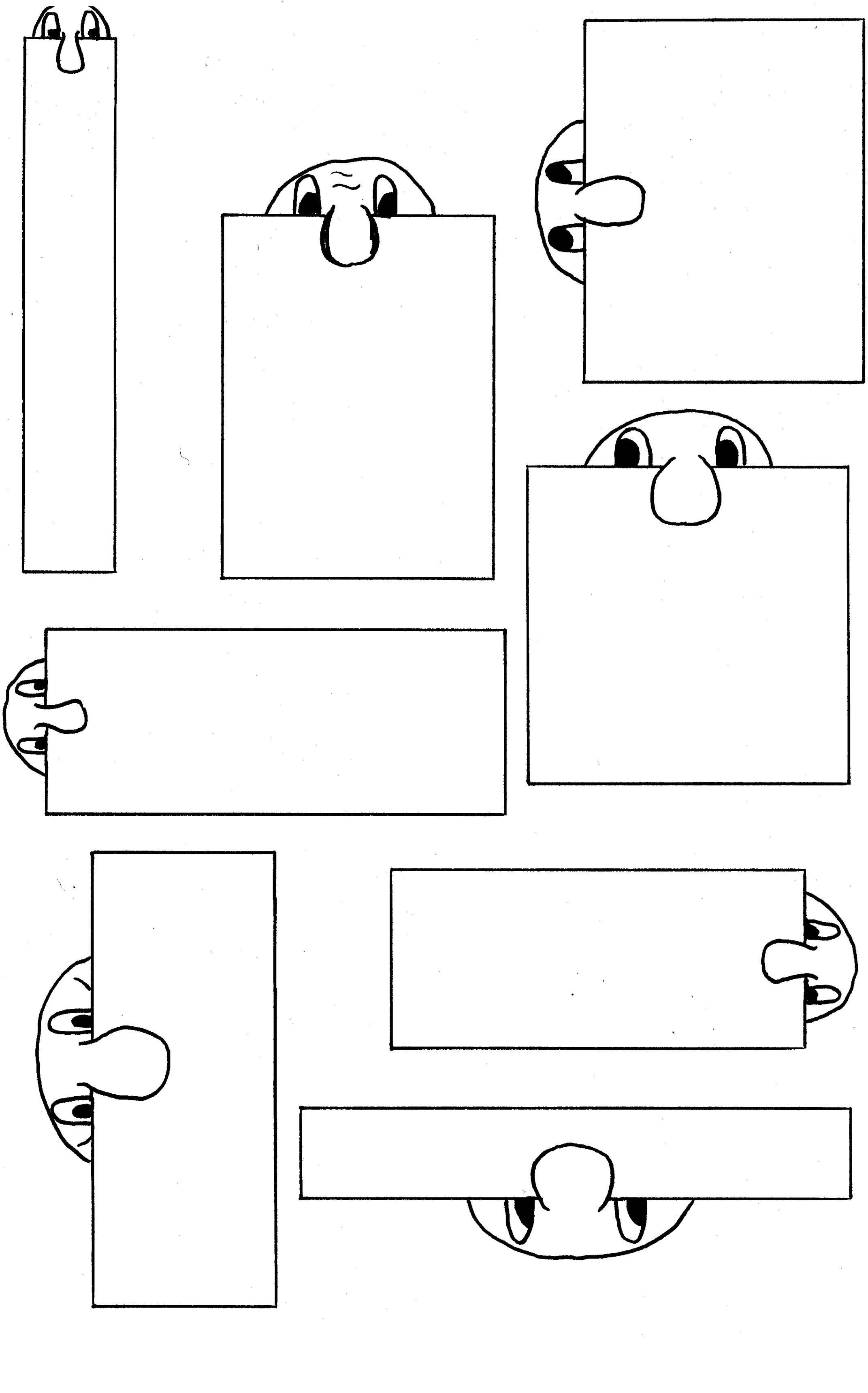
Bei dem Nachbarvolk der Teiumfaner werden die Speichen eines Laufrades an zwei Stellen geknickt (als konstante Länge der Speichen werden 15 LE angenommen), so dass unten offene Rechtecke entstehen.
Prüfe, ob es auch bei den Teiumfanern so eine Kennlinie gibt. Begründe das und gib eventuell eine Beschreibung mit Hilfe von Variablen an.

Der General

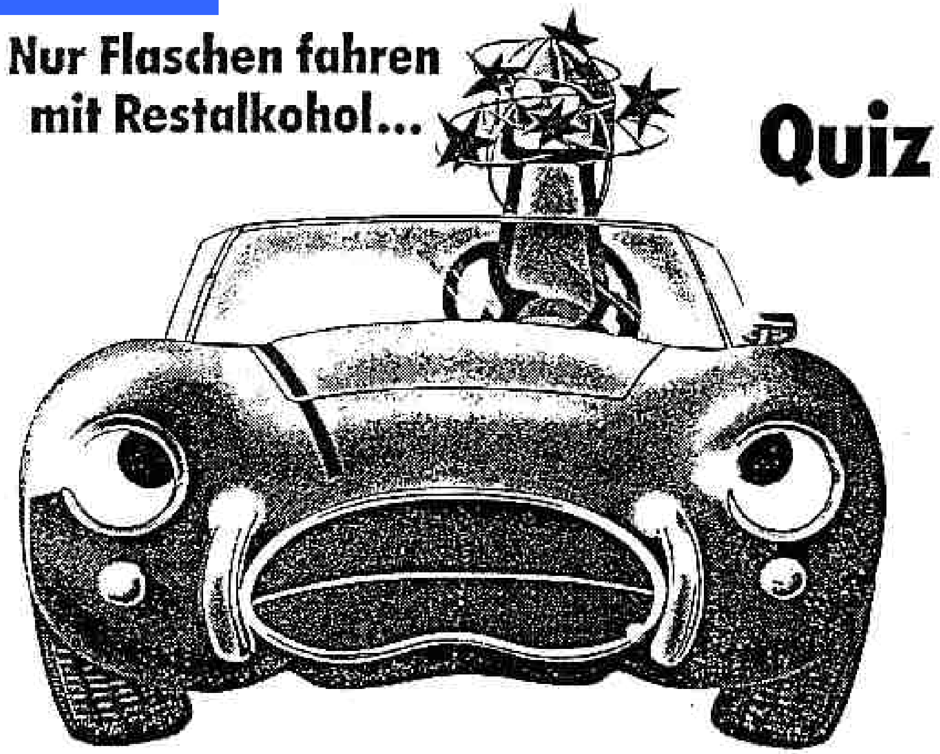
Die Umfanier suchen einen General. Da sich Generäle erfahrungsgemäß mit vielen Orden schmücken, die Umfanier aber diesen Ritus nicht so gerne mitmachen wollen, hat man sich entschlossen, denjenigen zum General zu zu ernennen, der die kürzeste Diagonale (für die Orden) besitzt.
Das lässt sich über Kreise mit der Diagonalenlänge zeigen. Der "quadratische Umfanier" wird zum General ernannt.
Jetzt machen die Teiumfaner es den Ufaniern nach. Der quadratische Teiumfaner wird aber nicht zum General ernannt.

Der König der Teiumfanier

König soll derjenige werden, der den "größten Bauch" hat. (Prinzip: alle dicken Männer sind stark, der stärkste muss König werden). Es liegt nahe den Flächeninhalt der (offenen) Rechtecke als Maß zu verwenden. Der quadratische Teiumfaner wird nicht König.



Restalkohol



Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen. Das leuchtet ein. Aber die wenigsten wissen, wie langsam Alkohol im Körper abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich 0,15 Promille stündlich. Weder Schlaf noch starker Mokka können dies beschleunigen. Wer z.B. nach einer Feier um Mitternacht einen Alkoholspiegel von 1,5‰ hat, kann sich leicht ausrechnen, wann er wieder restlos nüchtern ist. Denn bereits bei 0,3‰ muß ein Fahrer mit einer Geldstrafe und Führerscheinentzug rechnen, selbst dann, wenn er lediglich Anzeichen von Fahrunsicherheit zeigt. Bei 0,5‰ liegt auf jeden Fall eine Ordnungswidrigkeit vor, die mit Fahrverbot, Geldstrafe bis zu 3000,- DM und Punkten in Flensburg geahndet wird. **Darum: Nach Alkoholgenuß lieber Taxi, Bahn & Bus.** Jetzt fällt ihnen die Beantwortung der Quiz-Frage sicherlich nicht schwer.

Quiz-Frage:
a) Um wieviel Uhr sind Sie bei einer Ausgangslage von 1,5‰ um Mitternacht und einem durchschnittlichen Alkohol-abbauwert von 0,15‰ stündlich wieder restlos nüchtern und
b) wann haben Sie immerhin noch einen Alkoholspiegel von 0,5‰?

Quelle: MUED nach einer Anzeige des Deutschen Verkehrsrats (verändert)

Flaschen hinterm Steuer: Anregungen für den Unterrichtseinsatz

Ziel:
- Einstieg in das Thema „Lineare Funktionen“
- Modellbildung

Variationen der Aufgabe:
- Eventuell mit dem Biologielehrer eine parallele Behandlung der diesem Thema zugrundeliegenden biologischen Prozesse vereinbaren
- Zusätzlich zur Beantwortung der Fragen noch den zugehörigen Graphen zeichnen lassen. Daran weitere Fragen stellen
- Ausgangswert und Abbaufaktor variieren (Abbaufaktor schwankt individuell zwischen 0,1 und 0,3)

(Mögliche) Lösungen:
- a) 10 Uhr morgens
  b) 6.40 Uhr morgens

Eignung, (mögliche) Methoden:
- Partner- oder Gruppenarbeit (Wiederaufgreifen in Jg. 10: Abgrenzung zur Exponentialf.)

Hase und Igel

Rennkarte

Kosten der Züge. Für die Felder, die Sie in einem Zug vorrücken, zahlen Sie die angegebene Menge Karotten:

gezogene Felder	Karotten-abgabe	gezogene Felder	Karotten-abgabe
1	1	23	276
2	3	24	300
3	6	25	325
4	10	26	351
5	15	27	378
6	21	28	406
7	28	29	435
8	36	30	465
9	45	31	496
10	55	32	528
11	66	33	561
12	78	34	595
13	91	35	630
14	105	36	666
15	120	37	703
16	136	38	741
17	153	39	780
18	171	40	820
19	190	41	861
20	210	42	903
21	231	43	946
22	253	44	990

➤ Die Rennkarte wird benutzt bei proportionalem Zuordnen in Klasse 7. Fragestellung: Ist das proportional?

➤ Versuche mit Worten zu beschreiben, wie die Karottenanzahl festgelegt wird.

➤ Stelle den Verlauf (bis zu zehn gezogenen Feldern) grafisch dar.

➤ Einige der Funktionsvorschriften sind geeignet, die Rennkarte zu beschreiben:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot x$
b) $f(x) = 1\frac{1}{2} \cdot x$
c) $f(x) = 2 \cdot (x+1)$
d) $f(x) = (x+1) \cdot x/2$
e) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2+x)$
f) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot x$

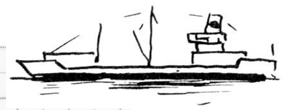
Grafischer Fahrplan

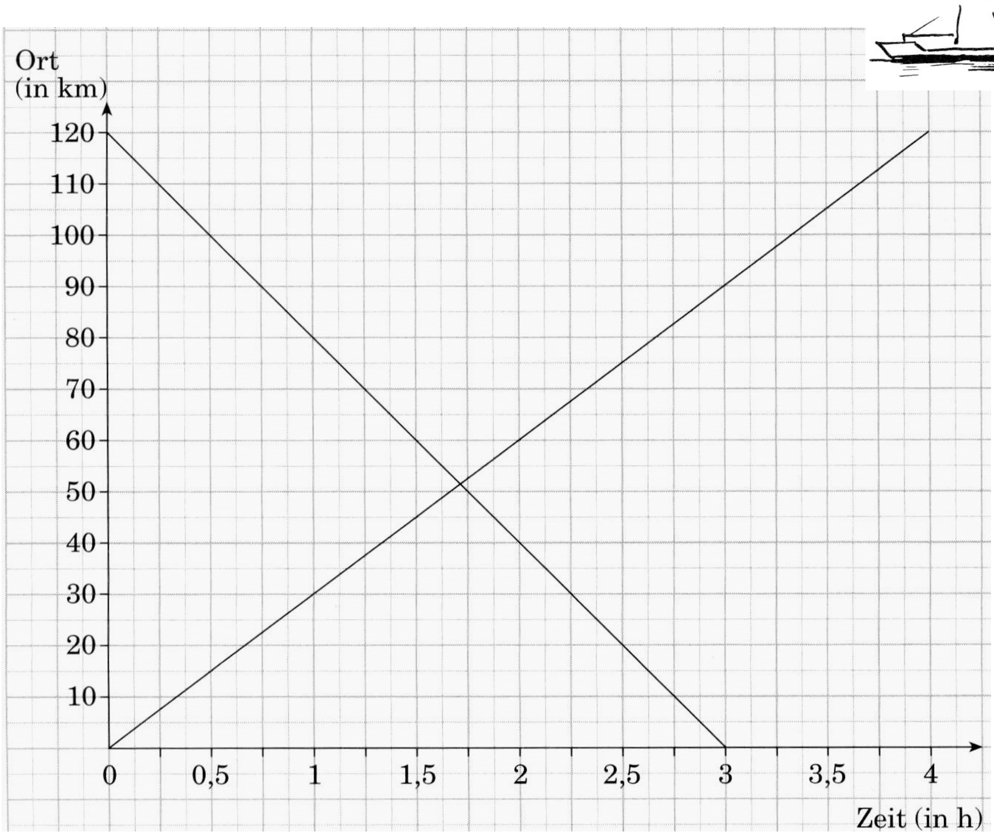
Ein Schiff startet vom Hafen Entenhausen und ist nach 4 Stunden im 120 km entfernten Hafen von Goofytown. Gleichzeitig mit ihm startet ein etwas schnelleres Schiff im Hafen von Goofytown und ist nach 3 Stunden im Hafen von Entenhausen. Unten siehst du das Zeit-Ort-Diagramm für die beiden Schiffe. Gib anhand des Diagramms zumindest ungefähre Antworten auf folgende Fragen:

a) Wann und wo fahren die beiden Schiffe aneinander vorbei?

b) Die Kapitäne der beiden Schiffe besitzen Ferngläser, mit denen sie ungefähr 20 km weit sehen können. In welchem Zeitintervall können die beiden Kapitäne einander im Fernglas beobachten? Wo befinden sich die beiden Schiffe dabei ungefähr?

c) Finde selbst weitere geeignete Fragen und beantworte sie.

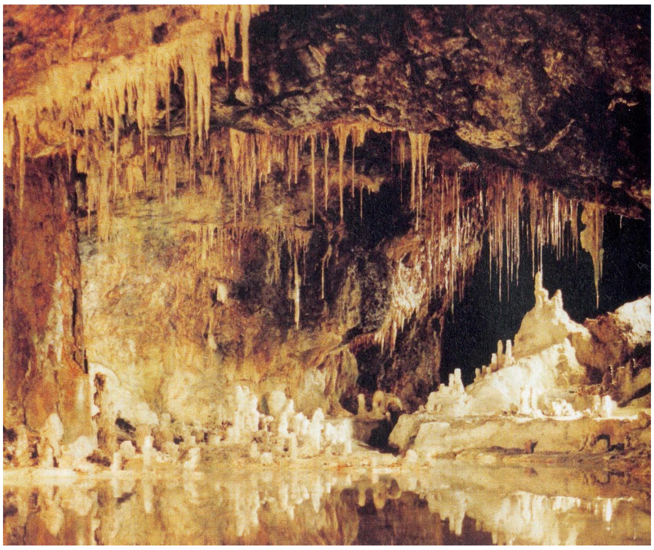


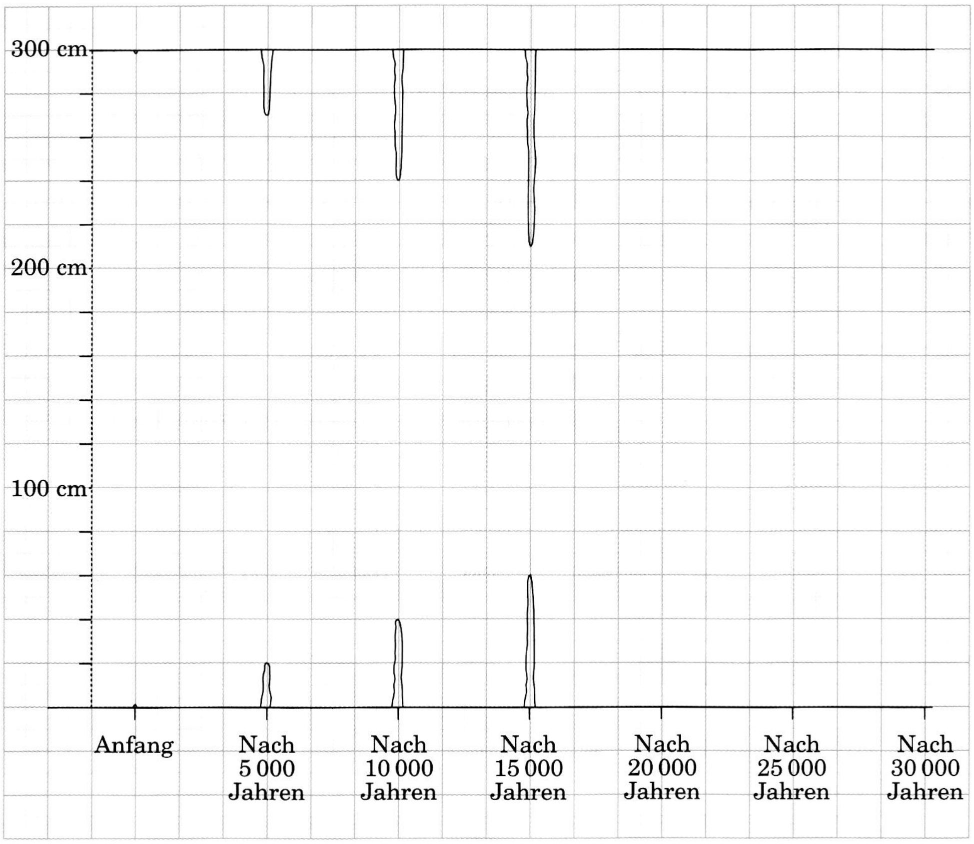


Quelle: Mathe-Welt, in: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 3.

Tropfsteinhöhle

In Tropfsteinhöhlen tropft an verschiedenen Stellen kalkhaltiges Wasser von der Decke. Durch ständige Kalkablagerungen bildet sich an jeder solcher Stelle ein von der Decke hängender Tropfstein (Stalaktit) und ein vom Boden aufsteigender Tropfstein (Stalagmit). Diese Tropfsteine wachsen allerdings sehr langsam und brauchen zu ihrer Entstehung viele tausend Jahre.





Anhand der Zeichnung können eine Reihe von Fragen rechnerisch und dann zur Kontrolle auch zeichnerisch beantwortet werden.

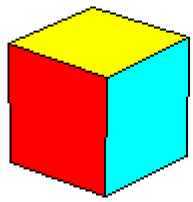
Finde selbst eine geeignete Frage und beantworte sie!

Quelle: Mathe-Welt, in: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 3.

Figurierte Zahlen

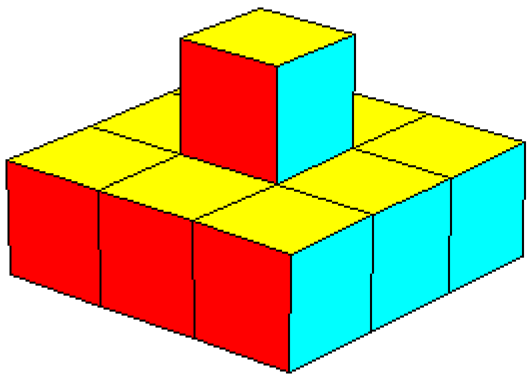
<u>Die Würfel Pyramide:</u>

Du siehst auf der rechten Seite die Abbildung von drei Würfelpyramiden. Die Pyramidenspitze liegt in der Mitte. Man kann sich die Entstehung dieser Pyramide so vorstellen, dass jeweils ein neues Quadrat mit ungerader Kantenlänge als neue Schicht unter die bereits bestehende Pyramide geschoben wird.

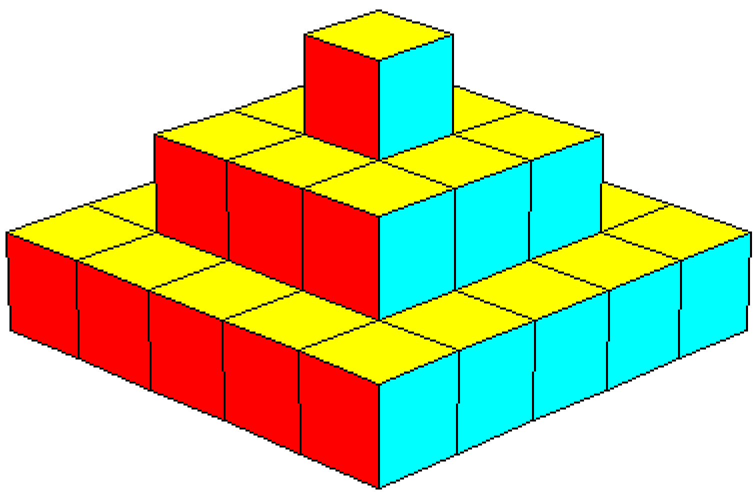


<u>Aufgabe:</u>

Ergänze die Tabelle. Beschreibe in einer Wortgleichung und mit einer Formel, wie die Anzahl der Einzelwürfel für die nächste Pyramide zu ermitteln ist.
Suche die Zuordnungsvorschrift für die aufgestellte Tabelle.



Höhe	Anzahl der Einzel-Würfel
1	1
2	10
3	
4	
5	
6	



Funktionen-Jigsaw

Planung
Was ein Jigsaw ist bzw. was sich hinter dieser Methode verbirgt, das wird aus dem Text "Die Jigsaw-Methode" (s.u.) deutlich.
Diesen Text ziehe ich auf Folie. Er ist als Einführung für die Schülerinnen und Schüler gedacht. Die Einführung in die Methode und die Gruppeneinteilung findet statt am Ende einer Stunde mit Testrückgabe und -besprechung, also vor der ersten Jigsaw-Stunde (Phase 1: Individuelle Überlegungen).
Während der Arbeit - vor allem beim Umstellen von einer auf die nächste Phase - wird die Folie wieder eingeblendet. Auch in der Phase 3 muss diese Folie vorliegen, weil die Schülerinnen und Schüler sich auf die Reflexionsfragen beziehen müssen.

Es werden durch Abzählen vier Gruppen gebildet (1, 2, 3, 4, 1, 2, ...). Dies hat aber zunächst gar keine Bedeutung, weil in der ersten Phase (Dauer ca. 20 Minuten) jede/r für sich allein arbeitet.

In der zweiten Phase, die m.E. zwei Schulstunden dauern wird, stehen folgende Themen für die vier Gruppen zur Verfügung

- Grafischer Fahrplan der Bundesbahn (Quelle: Heinz Böer, Funktioneneinführung, MUED-Material)
- Räuber-Beute-Modell 1 (Quelle: Heinz Böer, Exponentialfunktion und Jigsaw-Methode in Klasse 10 über MUED-Homepage
- Waldbrand auf Vancouver Island (Quelle: Andreas Meisner, werkstatt Hannover 1999)
- Schulweg- & Nordsee-Geschichten (Quelle: Mathematik lehren Nr. 95/1999)

Zum Abschluss bzw. nach dieser Phase soll eine Reflexion durchgeführt werden. Dazu muss jede/r individuell Stellung nehmen. Das wird sicher eine halbe Stunde dauern. Dabei geht es nicht um Inhalte. Ich habe diese Phase an diese Stelle gesetzt.

In der folgenden Phase setzen sich die ersten, zweiten, dritten,... vier Schülerinnen und Schüler wieder zusammen wie in der ersten Sitzordnung und es folgt die Phase 4 "Weitergabe des Gelernten". Zu dieser Phase mache ich zunächst keine Zeitangabe. Ich rechne mit anderthalb Schulstunden, bevor es zu einer abschließenden Reflexion dieser Phase kommt.

Die Jigsaw-Methode

Mit der Laubsäge (Jigsaw) kann man Puzzle ausschneiden. Das Gruppenpuzzle dient dazu, in Eigenarbeit und Expertengruppe erworbenes Wissen an andere weiterzugeben, wobei jede/r Schüler/in Verantwortung übernehmen muss.
Es werden 4 Aufgaben nach der Jigsaw-Methode bearbeitet:

Phase 1: Individuelle Überlegungen

- Jede/r Schüler/in erhält eine Aufgabe von den vier Aufgaben zugeordnet.
- Jede/r Schüler/in liest seine Aufgabe durch, markiert Wichtiges und überlegt/versucht einen Bearbeitungsweg, notiert Fragen.

Phase 2: Expertengruppe
Wechsel der Sitzordnung: Alle Schüler/innen, die der Aufgabe 1 zugeordnet sind, setzen sich zusammen. Bei 20 Schüler/innen ergeben sich 5er-Gruppen als **Expertengruppen**. Entsprechend gibt es für Aufgabe 2, 3, 4 auch jeweils eine Expertengruppe. Die Aufgabe lautet:

1. Notiert eine Aufgabenbearbeitung und sorgt dafür, dass alle Gruppenmitglieder sie beherrschen.
2. Überlegt, wie jede/r Einzelne die Aufgabe anderen erklären kann: Lösungswege notieren, Merksätze aufschreiben, Einstiege überlegen, Probleme ausmachen und Erklärungen/Beispiele überlegen, Skizzen anfertigen, ...
3. Übt die Vorstellung vor den anderen. Kurz: Macht euch zu Experten für die Aufgabe.

In dieser Phase und nur in dieser kann der Lehrer befragt werden: Fragen bei der individuellen Überlegung in Phase 1 sollen an die Expertengruppe gestellt werden. In Phase 2 sollen alle Probleme gelöst werden und es soll sich jede/r Schüler/in verantwortlich qualifizieren, so dass der Lehrer in Phase 4 nicht Feuerwehr spielen muss.

Phase 3: Erste Reflexion der Jigsaw-Arbeit in der Expertengruppe
Siehe im Anschluss an die Gruppenaufträge

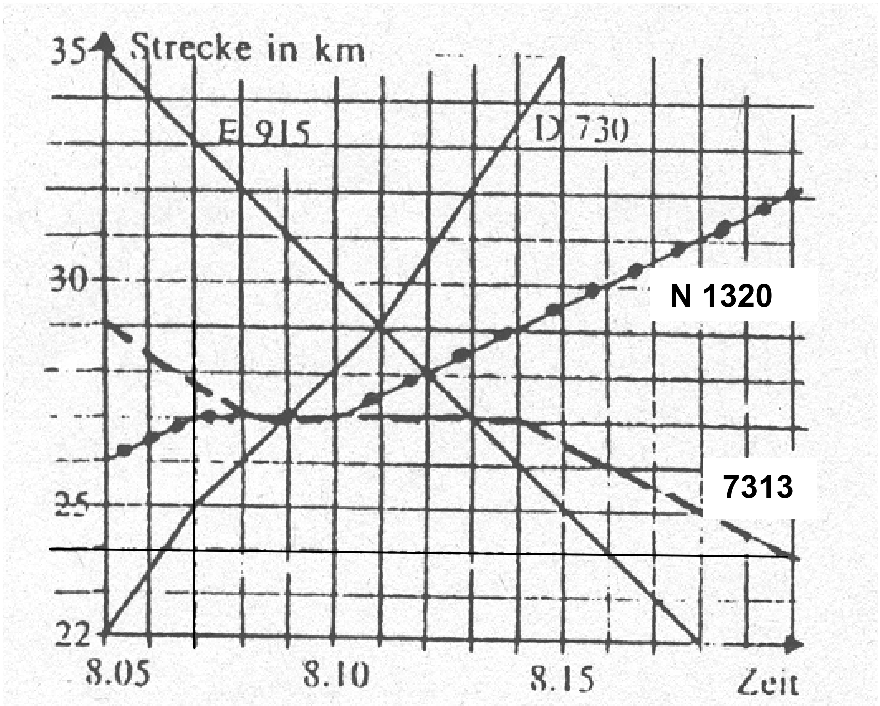
Phase 4: Weitergabe des Gelernten an die anderen in der Gruppe
Zurückwechsel in die erste Sitzordnung: Jeweils 4 Schüler/innen finden sich zusammen, so dass für jede Aufgabe ein/e Expert/in da ist. Wechselseitig werden die Aufgaben erklärt. Anschließend folgt eine Wiederholung der Phase 3 in dieser Gruppe.

Phase 5: Zweite Reflexion
Siehe im Anschluss an die Gruppenaufträge

Auf die Methode Jigsaw/Gruppenpuzzle bin ich durch die MUED-Homepage gekommen. Dort findet ihr auch den Text "Exponentialfunktion und Jigsaw-Methode in Klasse 10" von Heinz Böer.

Wilfried Jannack

Grafischer Fahrplan der Bundesbahn



a) Welche beiden Züge begegnen sich um 8.11 Uhr bei Kilometer 29? Wann und wo treffen sich andere Züge?

b) Renate behauptet, bei Kilometer 27 sei ein Bahnhof. Hat sie recht?

c) Woran erkennt man, dass drei Züge die Geschwindigkeit ändern? Welche Züge sind das?

d) Wann fährt der E 915 durch den Bahnhof?

e) Wo ist der N 1320 um 8.19 Uhr?

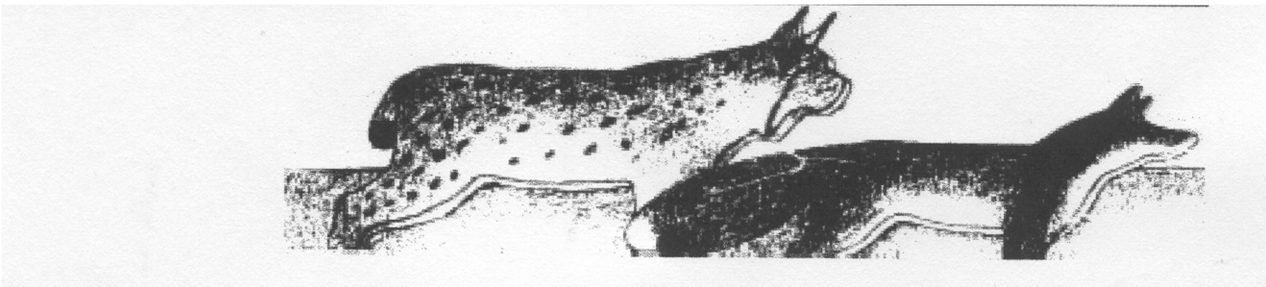
f) Wie lange steht der 7313?

g) Wann fährt der D 730 durch den Bahnhof?

h) Wo sind die vier Züge um 8.14 Uhr?

i) Stell dir vor, du stehst am Bahnhof bei Kilometerstein 27. Links von dir sind die Kilometersteine 26,25,... . Rechts von dir die Kilometersteine 28,29,... . Beschreibe, was von 8.05 bis 8.15 Uhr passiert.

Räuber-Beute-Modell

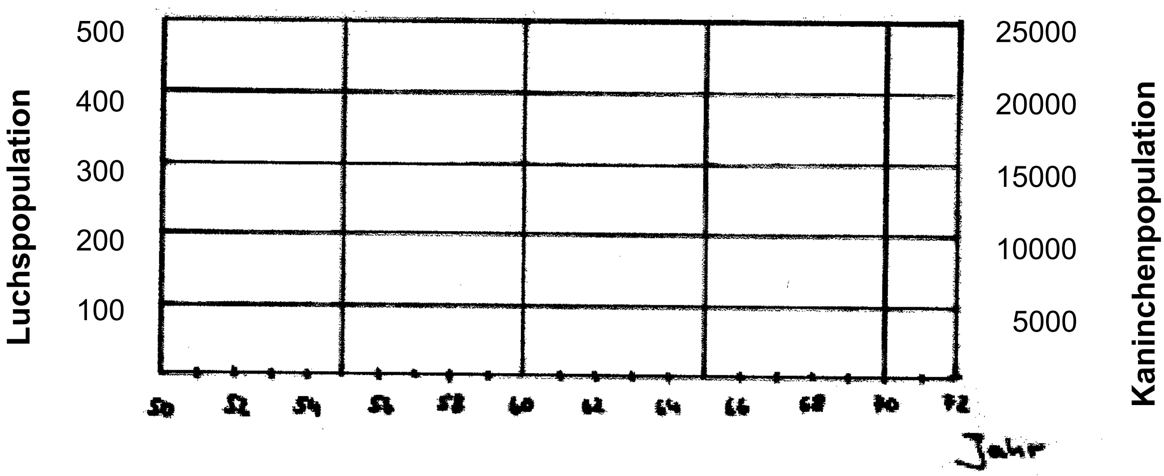


Ökologen haben sich zur Beschreibung der Vorgänge in der Umwelt Modelle erdacht, die die Wirklichkeit möglichst gut wiedergeben sollen. Eines diese Modelle ist das "Räuber-Beute-Modell". Der "Räuber-Beute-Zyklus" ist ein Vorgang, den man bei zahllosen Tierarten beobachten kann. Hier soll es erst mal um Kaninchen (Beute) und Luchse (Räuber) gehen.
Bei Zählungen in einem bestimmten Gebiet Nordamerikas gab es dort 1950 (t = 0) nach Schätzungen etwa 7000 Kaninchen. Relativ gesehen war das nicht viel. Diese Kaninchen waren u. a. die Beute für das Raubtier Luchs. Davon gab es 1950 ungefähr 350.
Auch in den nächsten Jahren wurden Zählungen durchgeführt:

Jahr	1951	1952		1955		1957		1961
Kaninchen	12000	19000		23000		18000		7000
Luchse	250	200		400		500		350

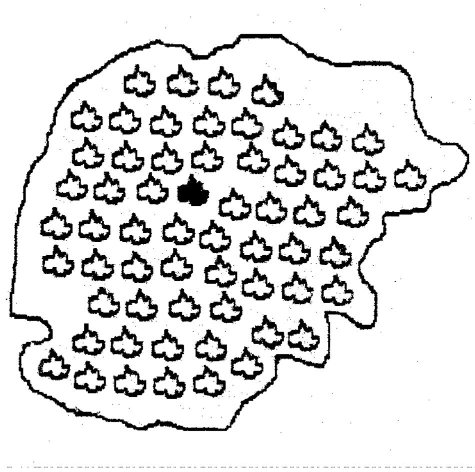
Durch allerlei Ursachen war es nicht möglich, in den anderen Jahren Zählungen durchzuführen. Man hatte auch die starke Vermutung, dass sich ungefähr alle 10 Jahre der Zyklus wiederholte. Das war einer der Gründe, warum man die Zählungen 1961 stoppte.

- Mach dir zuerst ein Bild von der Entwicklung der Luchs- und Kaninchenzahlen: Zeichne dazu ein Koordinatensystem wie abgebildet und trage die Zahlen der Tabelle ein. (Für Luchse und Kaninchen verschiedene Farben!)
  Gehe davon aus, dass sich der Zyklus ab 1961 wiederholt und setze die Entwicklung fort.
  Verbinde die entsprechenden Punkte zu Kurven - eine für die Beutetier- und eine für die Raubtierentwicklung.
- Die beiden Kurven verlaufen irgendwie "verschoben". Erkläre den Zusammenhang.



Waldbrand auf Vancouver Island

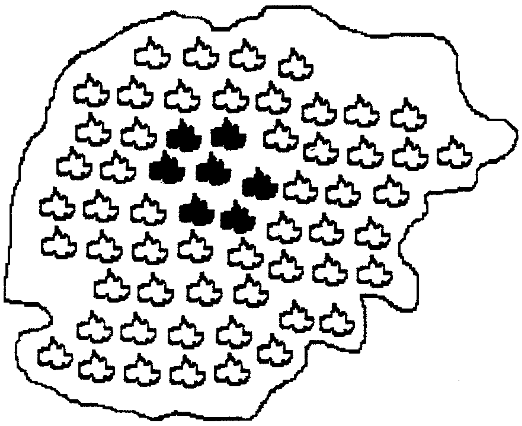
Bei Vancouver Island,vor der kanadischen Pazifikküste, befinden sich viele kleine Inseln, die zum größten Teil mit Redwood-Wald bedeckt sind. Zu den Gefahren für diese Wälder gehören nicht nur die Holz- und Papiergesellschaften , die den Wald abholzen wollen, sondern auch die durch Feuer verursachten Katastrophen. Ein Waldbrand würde eine solche Insel innerhalb kürzester Zeit verwüsten.



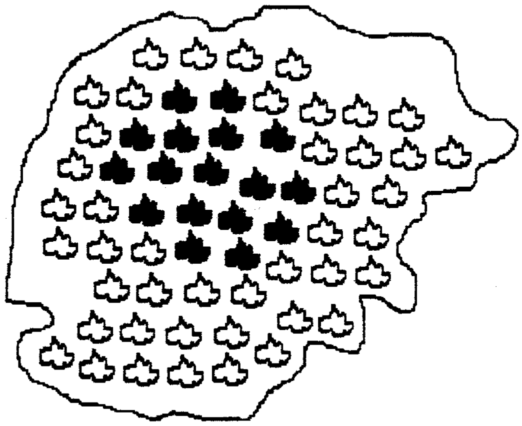
1. Stelle dir vor, dass ein Baum in der Mitte des Waldes (schwarz) z.B. durch einen Blitzschlag Feuer fängt. Zeichne einen Grafen, der zeigt, wie du meinst, dass sich der Waldbrand entwickelt.

2. Erläutere deinen Grafen in Worten.

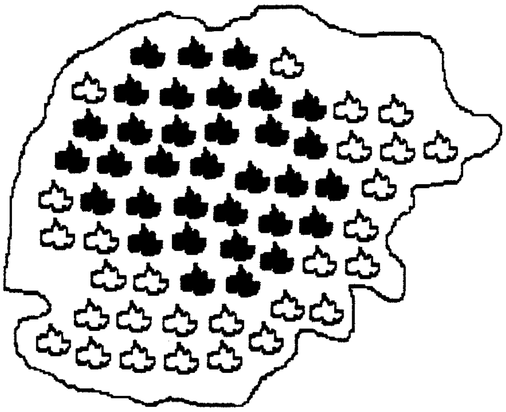
Stelle dir vor, das Feuer entwickelt sich folgendermaßen:



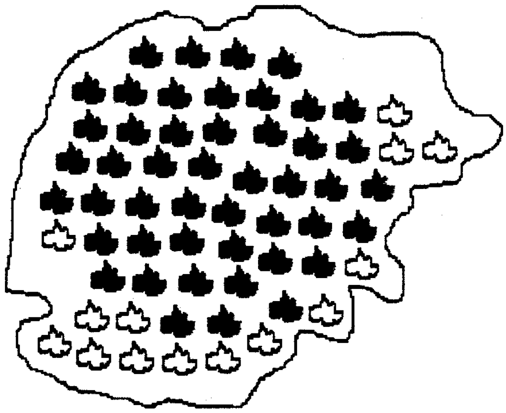
nach 10 Minuten



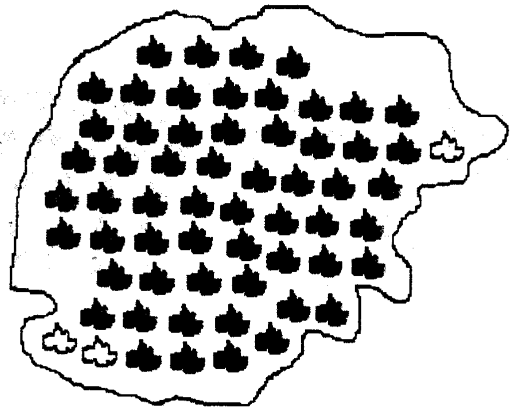
nach 20 Minuten



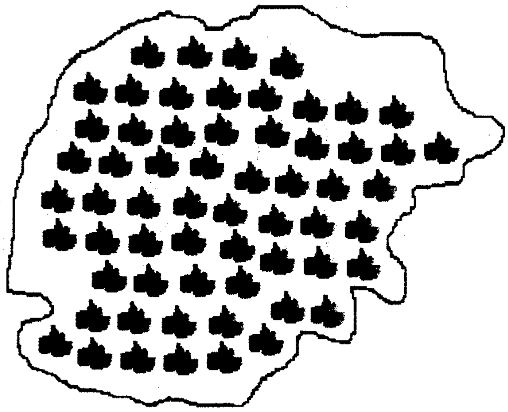
nach 30 Minuten



nach 40 Minuten



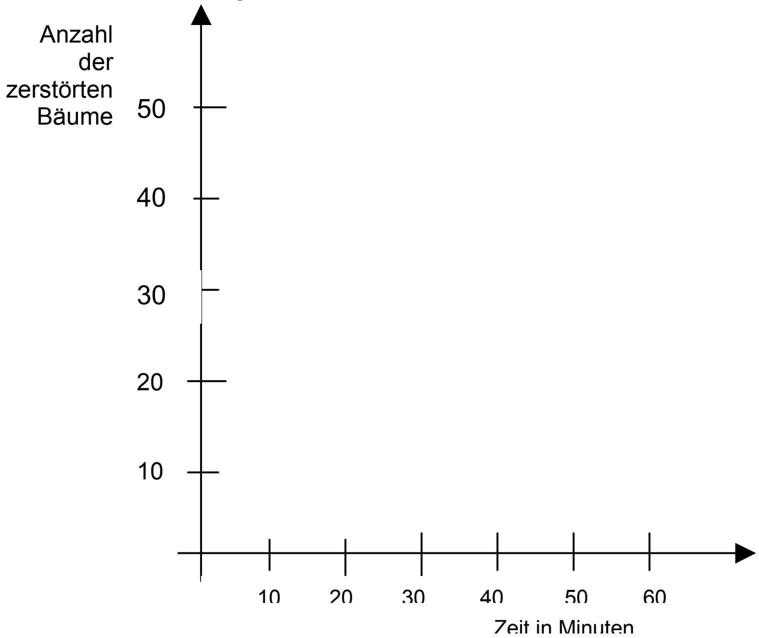
nach 50 Minuten



nach 60 Minuten

3. Zeichne einen Grafen, der die Entwicklung des Feuers darstellt.

Vergleiche mit deinem Grafen aus Aufgabe 1. Erläutere Gemeinsamkeiten und /oder Unterschiede.



4. Zeichne einen Grafen, der auf der y-Achse - anders als in Aufgabe 3 - nicht die Gesamtzahl der zerstörten Bäume, sondern die Anzahl der zurzeit neu brennenden Bäume darstellt (Änderungsgraf).

Schulweg-Geschichten

a. Stelle fest, was die x- und y-Achse angeben sollen.

b. Entscheide, zu welcher der drei "Schulweg-Geschichten" welcher der vier Grafen am besten passt!

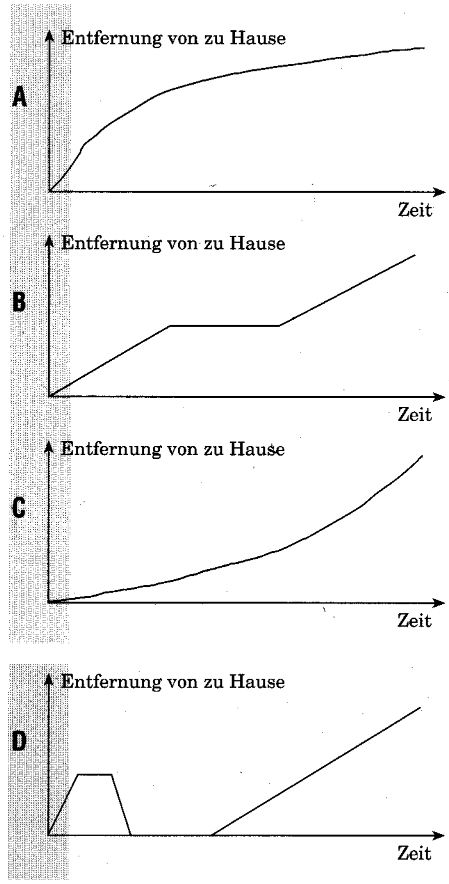
- Ich ging gemütlich los. Als mir klar wurde, wie spät es schon war, beeilte ich mich.

- Ich hatte gerade das Haus verlassen, als ich bemerkte, dass ich mein Frühstücksbrot vergessen hatte. Also ging ich zurück, um es zu holen.

- Zuerst ging es mir gut, doch dann bekam ich wieder starke schmerzen im Knie und konnte kaum noch laufen.

c. Ein Graf bleibt übrig. Schreibe selbst eine Geschichte dazu!

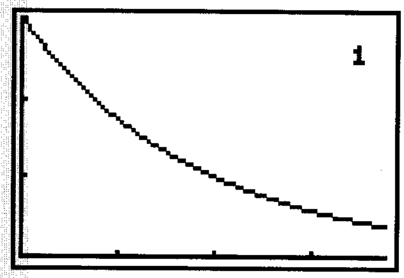
d. Beschreibe entweder deinen Schulweg oder einen besonders witzigen in Form einer Geschichte und als Graf.

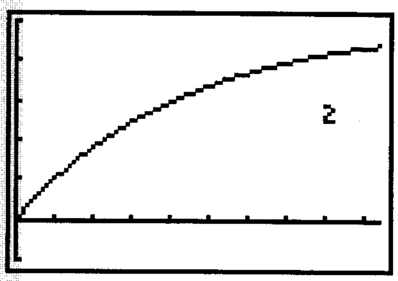


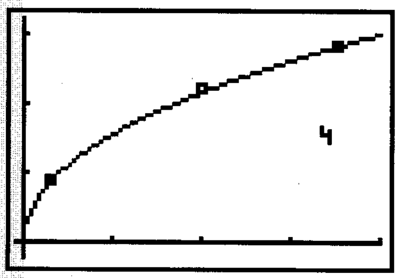
(Quelle: mathematik lehren/ Heft 95)

Nordsee-Geschichten

Hier ist alles durcheinander gekommen, die Grafen und die passenden Geschichten dazu. Kannst du wieder Ordnung schaffen und auch die Koordinatenachsen richtig beschriften?







- Käpt'n Hiinerk weiß: Je stärker der Wind ist, desto kleinere Segel müssen gesetzt werden, damit das Schiff nicht kentert. Bei Windstärke 2 wird das 15 m² große Großsegel gesetzt.

- Fischer Balje weiß: Je länger ein Fisch ist, desto schneller kann er schwimmen. Heringe von 30 cm Länge schwimmen 4 m/sec.
  Schwertfische von 3,5 m Länge schwimmen 14 m/sec und 2 m lange Delfine ("Fische"?) schwimmen 11 m/sec.

- Stuntman Joe springt aus dem Flugzeug und fällt immer schneller auf die Erde zu, bis er den Fallschirm (hoffentlich noch rechtzeitig) öffnet. Nach ca. 7,2 Sekunden hat er etwa die Geschwindigkeit von 40 m/sec (144 km/h).

- So ein frisch gezapftes Bier mit seiner Schaumkrone ist doch etwas Herrliches! Schnell schwindet der Schaum, so dass von den 3 cm nach 1,5 min nur noch 0,6 cm vorhanden sind.

(Quelle: mathematik lehren/ Heft 95)

Funktionale Untersuchungen mit DynaGeo

Andreas Koepsell

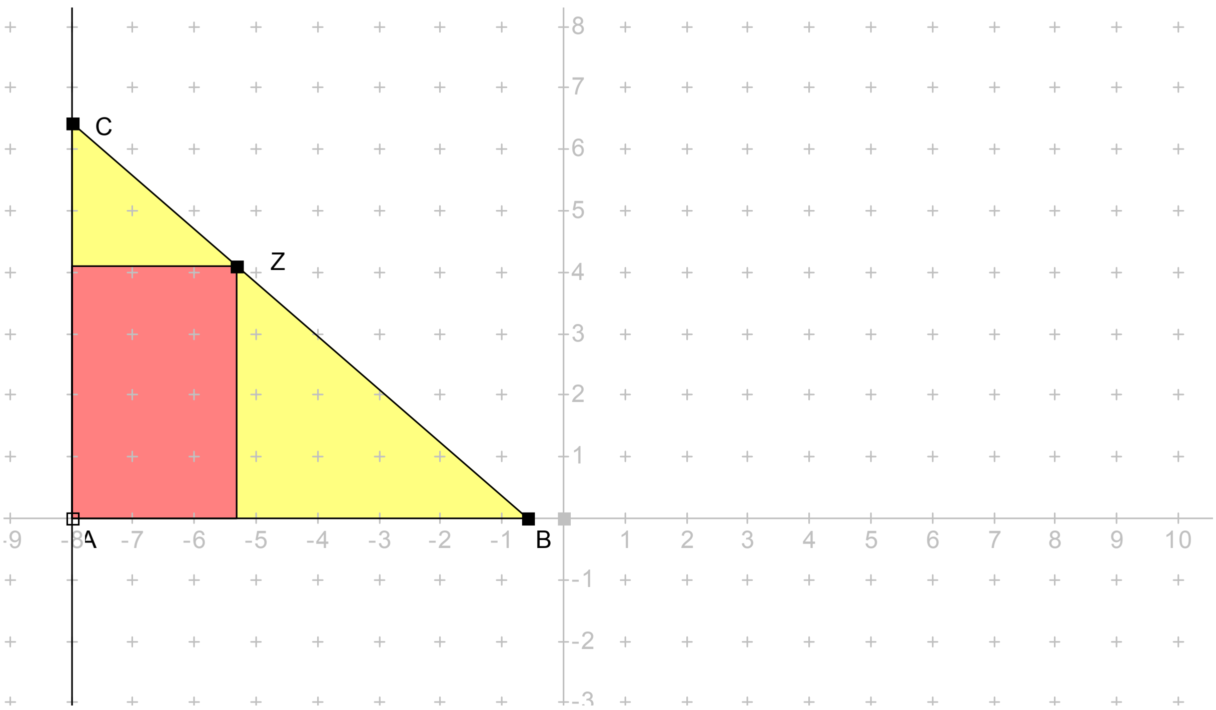
Das Programm DynaGeo (Eukild) ist eigentlich nicht bekannt als Software, mit der man Funktionen untersuchen kann. In vielen Übungen mit Studentinnen und Studenten habe ich mit der dynamischen Geometrie Software Flächenveränderungen betrachtet und diese dann funktional betrachtet. Die Darstellung einer Flächenfunktion geschah dann auch mit dem Programm DynaGeo und zwar ohne, dass die Funktionsgleichung gefunden werden musste. Mit diesem Verfahren meine ich, dass grundlegende Verständnis für Funktionen auszubilden: Was stellt der Funktionsgraph dar, wie kann sein Verlauf gedeutet werden, welche Auswirkungen haben Veränderungen in der Ausgangsfläche, wie findet man besondere Punkte im Funktionsgraphen und welche Bedeutung haben sei, etc.
In einem zweiten Schritt kann man zur formalen Aufarbeitung kommen und Funktionsgleichungen suchen. Dieser Weg muss sich aber nicht unmittelbar anschließen.

Zum Schluss wird dargelegt, wie man mit DynaGeo einen Funktionsgraphen beliebiger Art über Ortskurven erstellen und die Parameter dann verändern kann. Diese Bearbeitung setzt die Kenntnis der behandelten Funktionen voraus. Der Bearbeitungsschritt kann vertiefende Einsichten vermitteln. Wenn das Programm DynaGeo den SchülerInnen bekannt ist, so wird sich diese Bearbeitung leichter ergeben, als die Eingabe von Funktionsscharen in einem entsprechenden Funktionsplotter.

Beispiel 1:
Rechteck im rechtwinkligen Dreieck:

> *Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck A,B und C. In diesem rechtwinkligen Dreieck soll ein Rechteck so hineingelegt werden, dass dessen Flächeninhalt möglichst groß wird.*

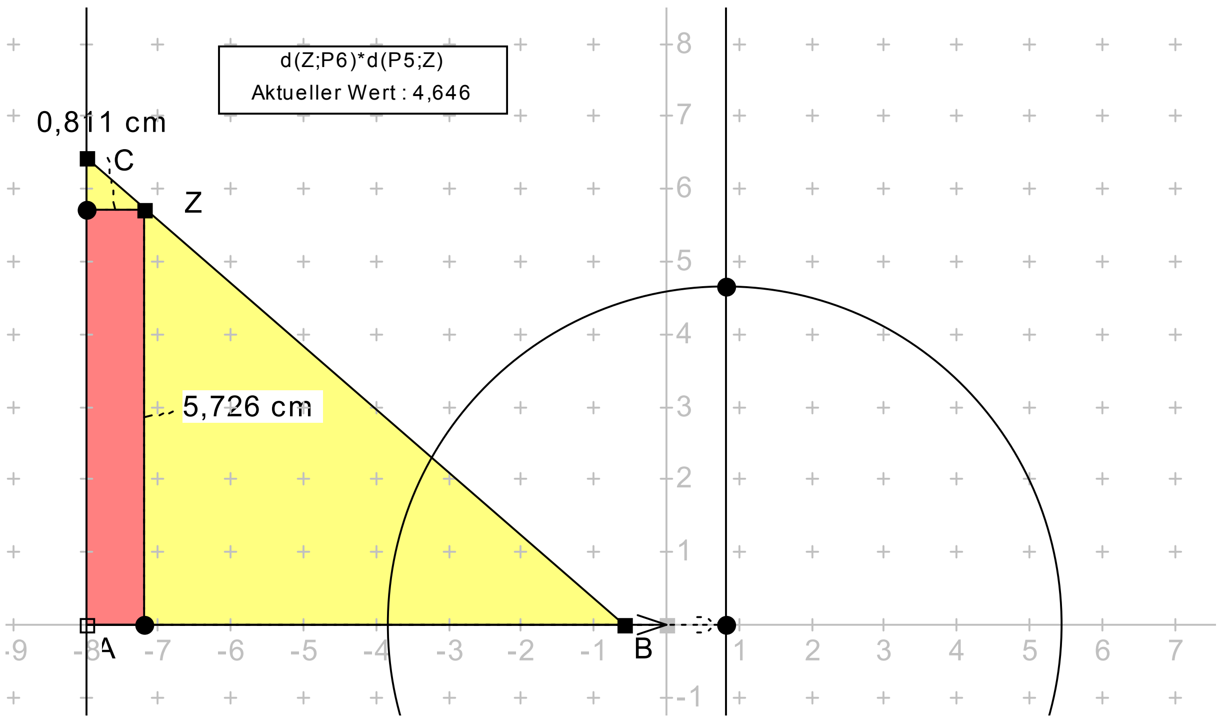
Die Ausgangsfigur sieht wie folgt aus:



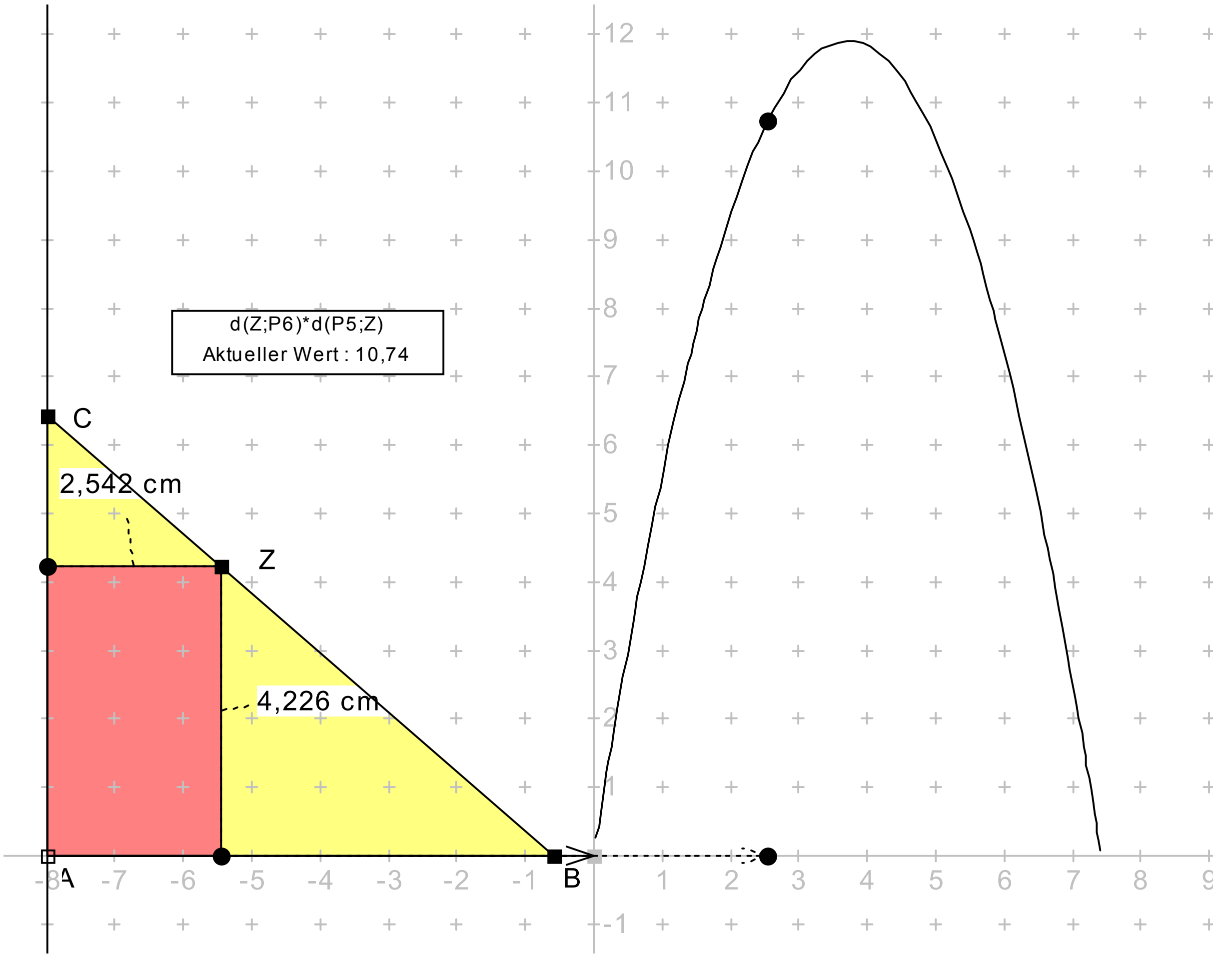
Der Punkt Z kann bewegt werden. Er liegt auf der Strecke BC. Durch die Lage von Z sind die Abmessungen des Rechtecks bestimmt.

Der Flächeninhalt soll zunächst berechnet werden. Dazu müssen Länge und Breite des Rechtecks vermessen werden. Mit Hilfe des Termfensters wird der Flächeninhalt angezeigt.
Man hat nun verschiedene Möglichkeiten die Flächenkurve darzustellen. Mit der Bewegung von Z soll ein Punkt auf der x Achse ausgehend vom Ursprung nach rechts wandern. Diese Bewegung eines Punktes auf der x Achse wird erzeugt, indem man die horizontale Entfernung des Punktes Z von A misst und dann mit dem Befehl „Kreis mit einem bestimmten Radius" einen Kreis im Ursprung definiert. Der Radius ist der zuvor gemessene Abstand. Wird Z nun bewegt, so verändert sich der Kreisradius. Der Schnittpunkt zwischen Kreis und x Achse wird erzeugt und in diesem Punkt eine Lotgerade errichtet. Auf dieser Lotgerade soll nun ein Punkt in y Richtung wandern . Er stellt durch seine Lage den Flächeninhalt dar. Als Befehl verwendet man wieder „Kreis mit einem bestimmten Radius". Als Radius gibt man den berechneten Flächenwert als Bezug ein.
Nun wird die Ortskurve dieses Punktes aufgezeichnet. Man erhält als Flächengraph eine Parabel.

Diese Parabel besitzt keine Verlängerungen in den negativen Bereich. Dies muss mit Schüler und Schülerinnen besprochen werden. Was sollte in diesem Deutungszusammenhang auch eine negative Fläche sein oder wie misst man negative Abstände?



Die Flächenfunktion als Ortskurve:

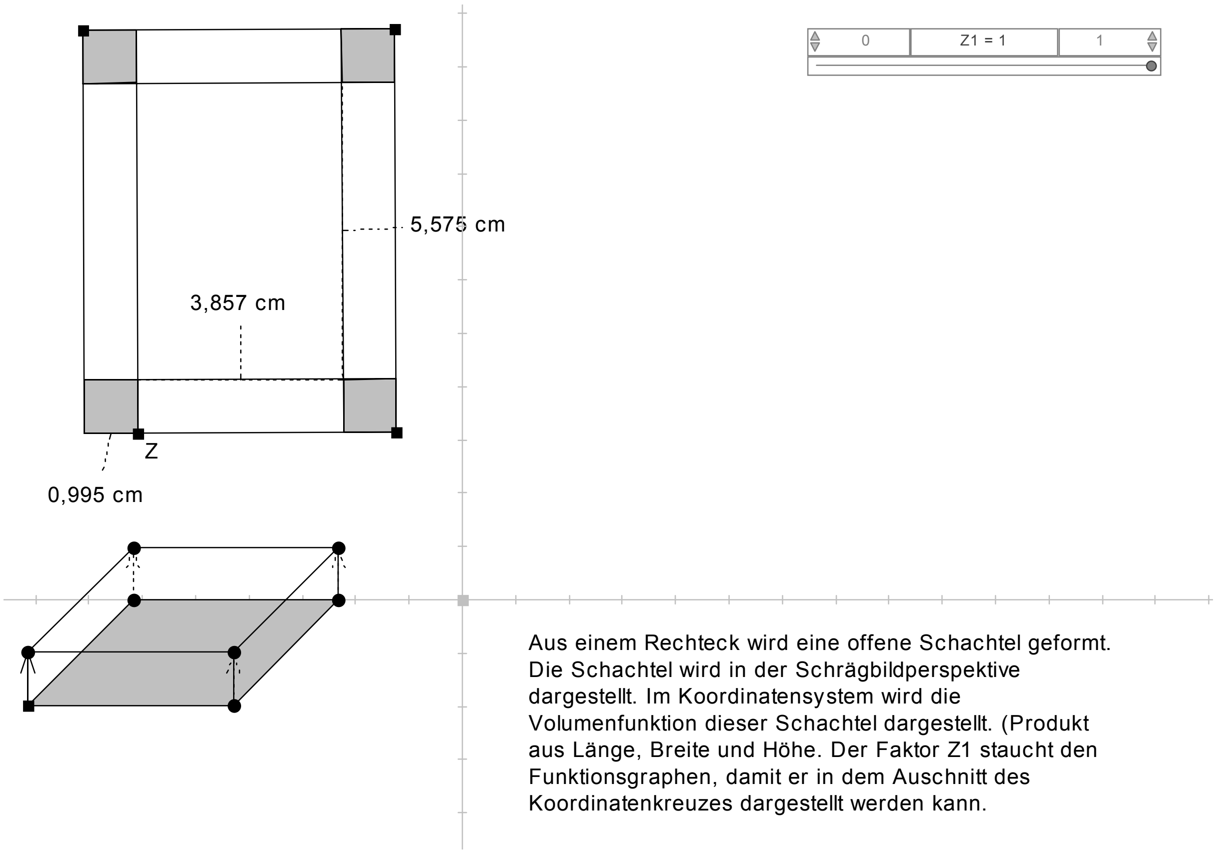


Dieser Erarbeitung mit DynaGeo muss sich eine geometrische Deutung anschließen. Warum ist der maximale Flächeninhalt gleich dem halben Flächeninhalt des Dreiecks? Gibt es eine geometrische Lösung, die den Zusammenhang durch Flächenvergleiche löst?

Beispiel 2:
Das Schachtelproblem:

Aus einem rechteckigen Stück Papier soll eine nach oben offene Schachtel geformt werden. Dazu müssen in den Ecken Quadrate ausgeschnitten werden, so dass die Seitenwände nach oben geklappt werden können. Die ausgeschnittenen Rechtecke können nun unterschiedlich groß werden. Dadurch ändert sich das Volumen der Schachtel.

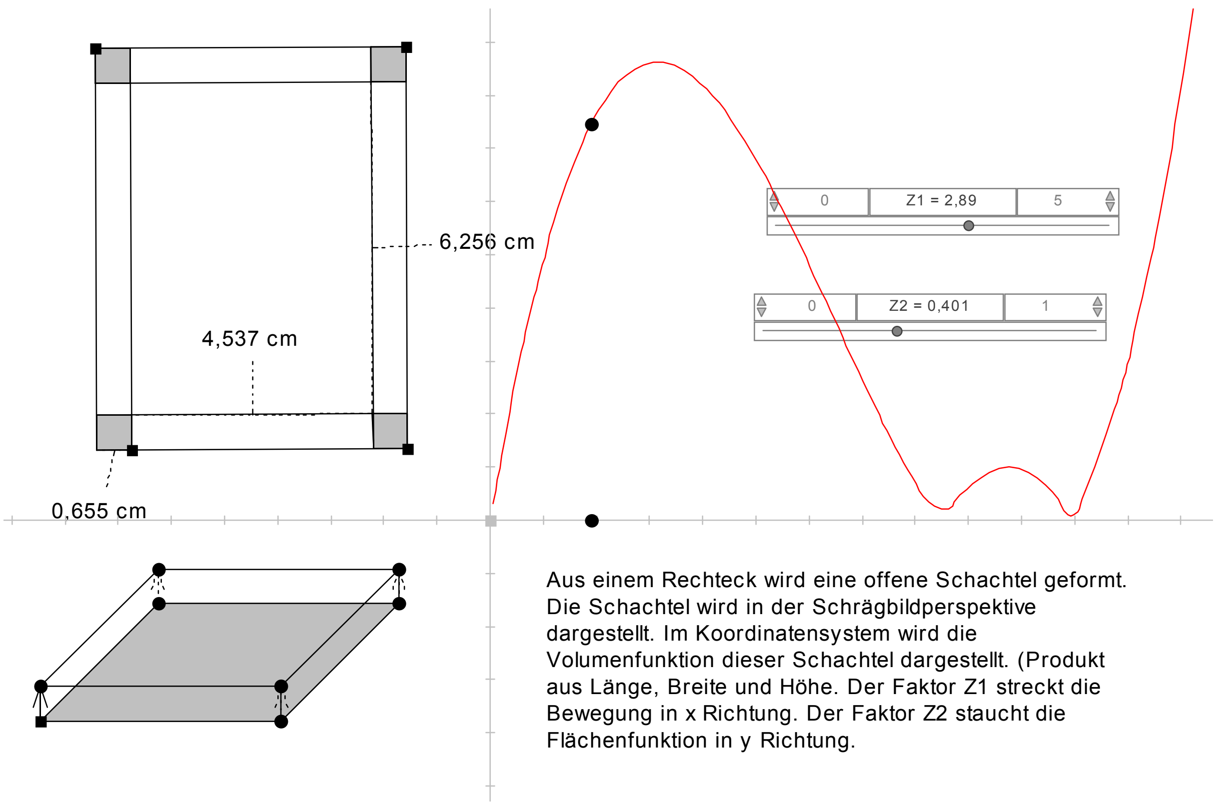
Zunächst wird in einer dynamischen Zeichnung das Rechteck mit den quadratischen Abschnitten konstruiert. Der Punkt Z ist beweglich. Unter dieser dargestellten Fläche wird das Schrägbild der entstehenden Schachtel konstruiert. Auch dieses verändert sich in seinen Abmessungen.



Nun wird zunächst das Volumen der Schachtel berechnet. Dazu sind schon alle notwendigen Maße bestimmt worden. Das Volumen wird in einem Termfenster angezeigt.
Nun soll die Flächenveränderung durch Bewegung des Punktes x grafisch dargestellt werden. So kann dann leicht das Volumenmaximum gefunden werden.

Wie im oberen Beispiel erzeugt man zunächst einen Punkt, der auf der x Achse in Abhängigkeit von Z nach rechts wandert.

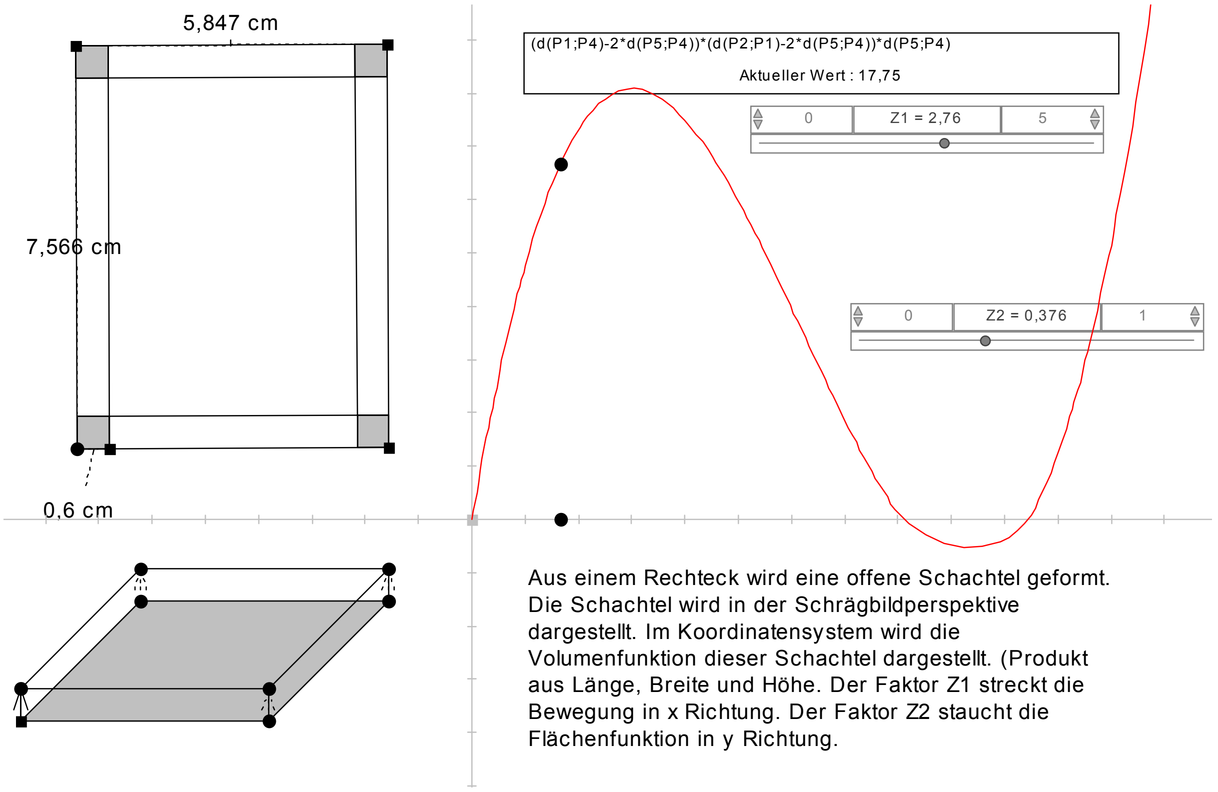
In dem nach rechts wandernden Punkt errichtet man eine Lotgerade. Auf dieser Lotgerade soll ein zweiter Punkt wandern, der das Volumen der Schachtel als Lage im Koordinatenkreuz darstellt. Da das Koordinatenkreuz nur in einem kleinen Ausschnitt sichtbar bliebt, muss die Funktion durch den Faktor z1 gestaucht werden.



Der Graf dieser Funktion muss zusammen mit Schülern interpretiert werden. Man kann drei Berührungen mit der x Achse betrachten. Was passiert dort mit der Schachtel? Warum wird das Volumen Null? Hat die Funktion einen Knick? Wie sieht die Funktion aus, wenn man nur eine Veränderliche als Eingabe zulässt?[1] Zur Zeit ändern sich drei Größen beim Ziehen von Z gleichzeitig: Die Abmessungen der Grundfläche (Länge und Breite) und die Höhe der offenen Schachtel.
Was passiert also, wenn wir nur noch eine Veränderliche betrachten: Dann ist die Länge der Grundfläche L – 2x (mit L = Länge des Rechtecks und x = Kantenlänge der quadratischen Abschnitte) und die Breite der Grundfläche ist B – 2x. Das Volumen der Schachtel ergibt sich dann V = (L – 2x) (B – 2x) x.
Diese Funktion soll dargestellt werden. Man muss nun andere Strecken messen und ein Termfenster zur Berechnung des Volumens neu definieren. Die Funktionsdarstellung muss verändert und die Ortskurve aufgezeichnet werden.

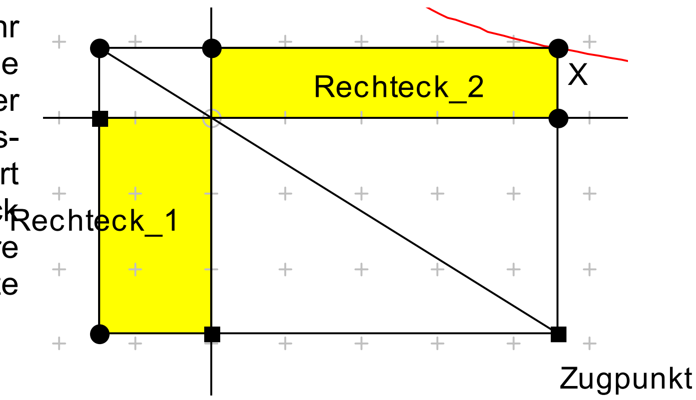
Und plötzlich bekommt man negative Volumenwerte. Wodurch können diese entstehen? Welche Möglichkeit gibt es, dies praktisch aus dem Sachzusammenhang zu interpretieren?

[1] Natürlich sind alle Maße in der Zeichnung veränderlich. Wenn von einer Veränderlichen gesprochen wird, so gilt dies für eine Erzeugung der Ortslinie. Für diese Erzeugung bleiben die Abmessungen des Ausgangsrechtecks konstant. Es ändern sich die abzuschneidenden Quadrate.



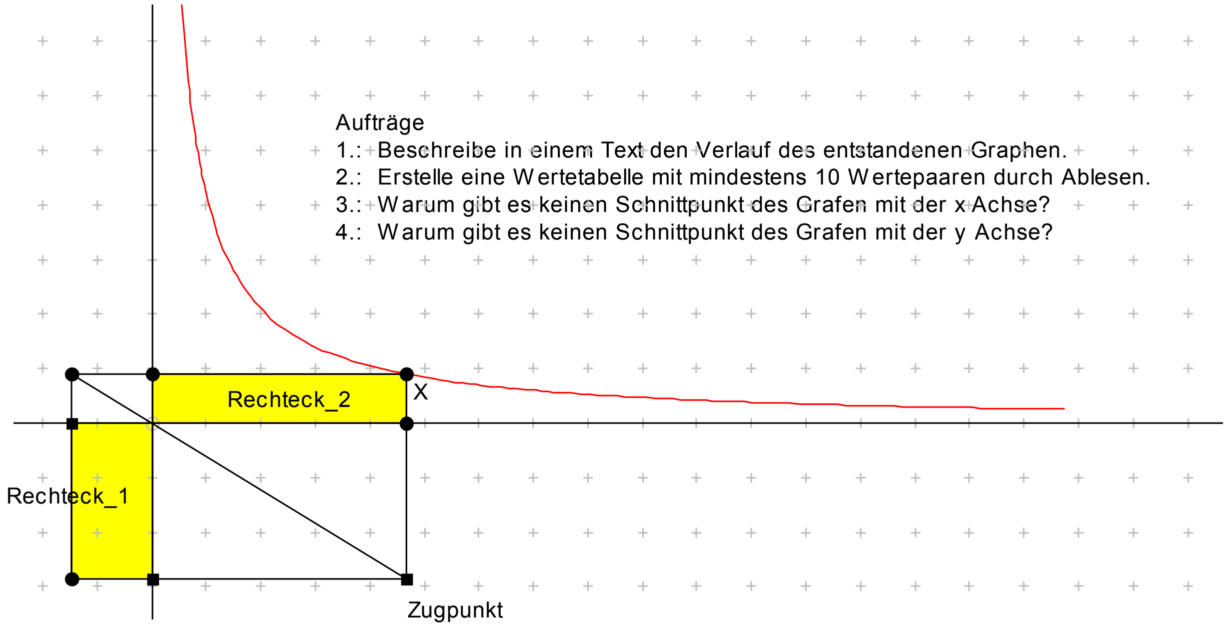
Beispiel 3:
Die Gnom Figur: Durch Veränderung von dynamischen Figuren können Kurven erzeugt werden, die auch mit Funktionen gedeutet werden können.

Bei dieser in den Waldorfschulen sehr bekannten Figur geht es um eine Flächenverwandlung zweier gleich großer Rechtecke. Das Rechteck 1 ist die Ausgangsfigur und kann beliebig verändert werden. Nun wird ein zweites Rechteck (Rechteck 2) erzeugt, das eine andere Länge und auch eine andere Breite besitzt. Trotzdem ist es flächengleich.



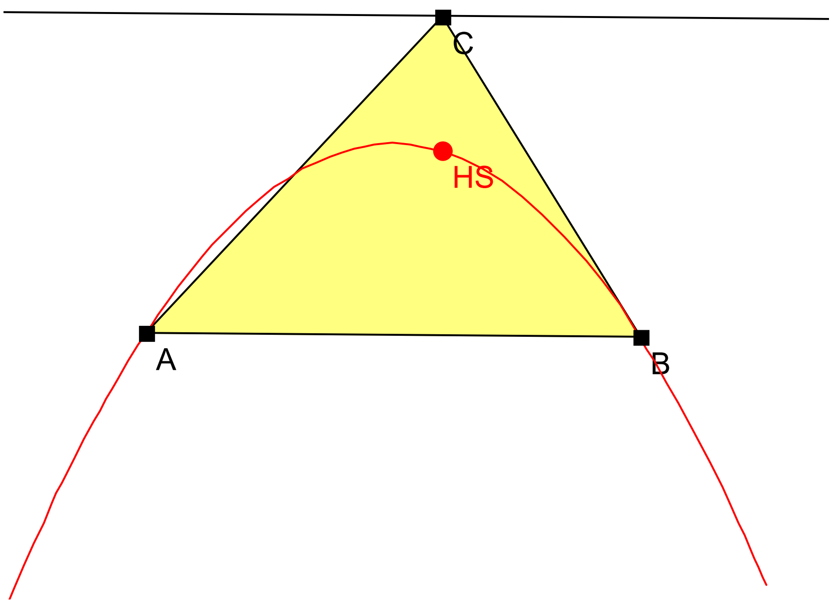
Auftrag: Formuliere eine Begründung für die Flächengleichheit der beiden Rechtecke!

Durch Ziehen am Zugpunkt können die Abmessungen des Rechtecks 2 verändert werden. Die Flächengleichheit bleibt dadurch bestehen.
Die Gesamtfigur befindet sich in einem Koordinatensystem. Die Ortskurve des Punktes x wird aufgezeichnet. Der entstehende Graf wird betrachtet und sprachlich beschrieben.



Sollten Funktionsgleichungen schon besprochen worden sein, so kann man versuchen, diese Funktion durch eine Funktionsgleichung anzunähern.

Beispiel 4:
Geometrische Erzeugung einer Parabel:
Man konstruiere ein beliebiges Dreieck A,B und C. Durch einen beliebigen Punkt wird eine Parallele zur Strecke AB erzeugt. Nun wird der Eckpunkt C auf diese Parallele gebunden.
In dem Dreieck werden die drei Höhen konstruiert und der Höhenschnittpunkt eingezeichnet. Bewegt man nun den Eckpunkt C, so bewegt sich der Höhenschnittpunkt auf einer parabelförmigen Ortskurve.[2]



[2] Mit den Kenntnissen aus „Beispiel 6“ kann man nachweisen, dass hier eine Parabel vorliegt. Man entwickelt im gleichen Arbeitsblatt einen Funktionsplotter für Parabeln und verändert über Zahlobjekte die Parameter so, dass die erzeugte Parabel mit der Ortslinie der Gnom Figur zur Deckung kommt.

Nachdem man das Koordinatenkreuz sichtbar gemacht hat, kann man die Lage der Eckpunkte des Dreiecks so verändern, dass eine Normalparabel entsteht.

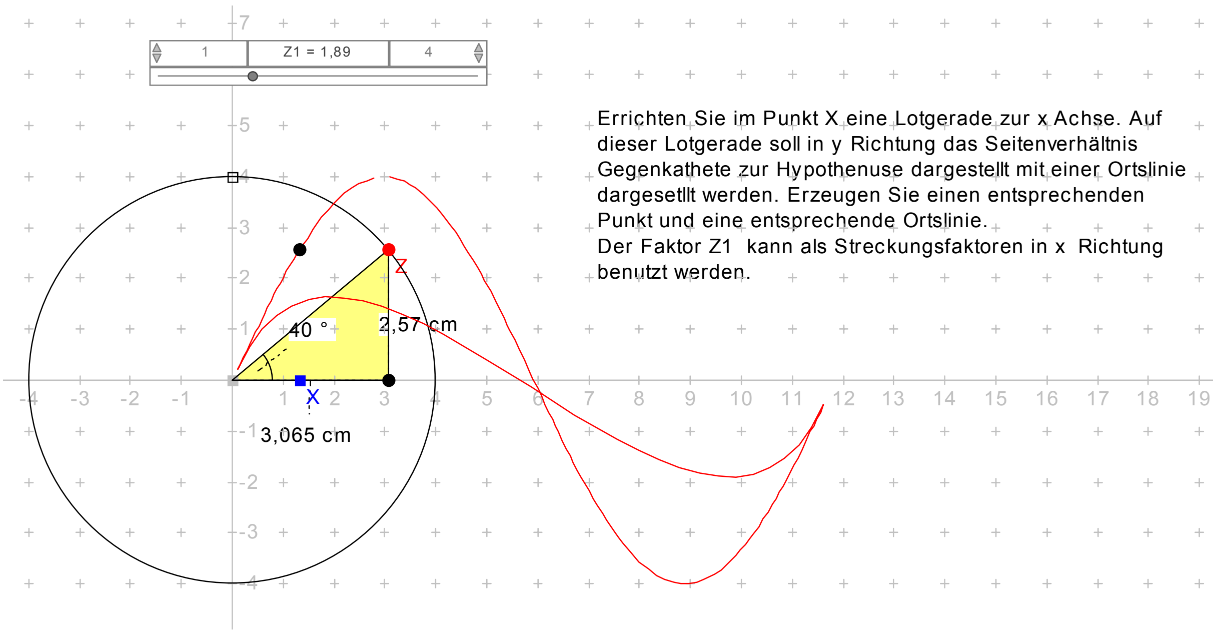
Beispiel 5:

Die Sinusfunktion erzeugt man aus dem Einheitskreis. Aber wie geschieht das? Bekannt ist den Schülerinnen und Schülern einer 10. Klasse, dass eine Kreisbewegung in eine Hin- und Herbewegung verwandelt werden kann. Das Prinzip des Kolbenmotors beruht auf diesem Prinzip.

Man erzeugen einen Kreis. Die zur Definition des Kreises benötigten Punkte werden versteckt. Dann bindet man einen Punkt Z auf die Kreislinie. Wie im Bild gezeichnet kann ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert werden.

In einen Dreieck kann es nur einen rechten Winkel geben. Daher wird der gemessene Winkel α im Dreieck auch nicht größer als 90° werden. Wir messen aber den Winkel zwischen der x Achse und der Hypotenuse. So entstehen Gradzahlen bis 360°.

Um die Sinuskurve darzustellen, brauchen wir wie in den anderen Konstruktionen auch, einen Punkt auf der x Achse, der in Abhängigkeit von der Bewegung des Punktes Z vom Ursprung aus nach rechts wandert. Die Veränderung des Winkels α wird in eine zum Kreisbogen proportionale Strecke umgerechnet und diese Bewegung dann als Punkt auf der x Achse erzeugt. In diesem Punkt erzeugt man eine Lotgerade.



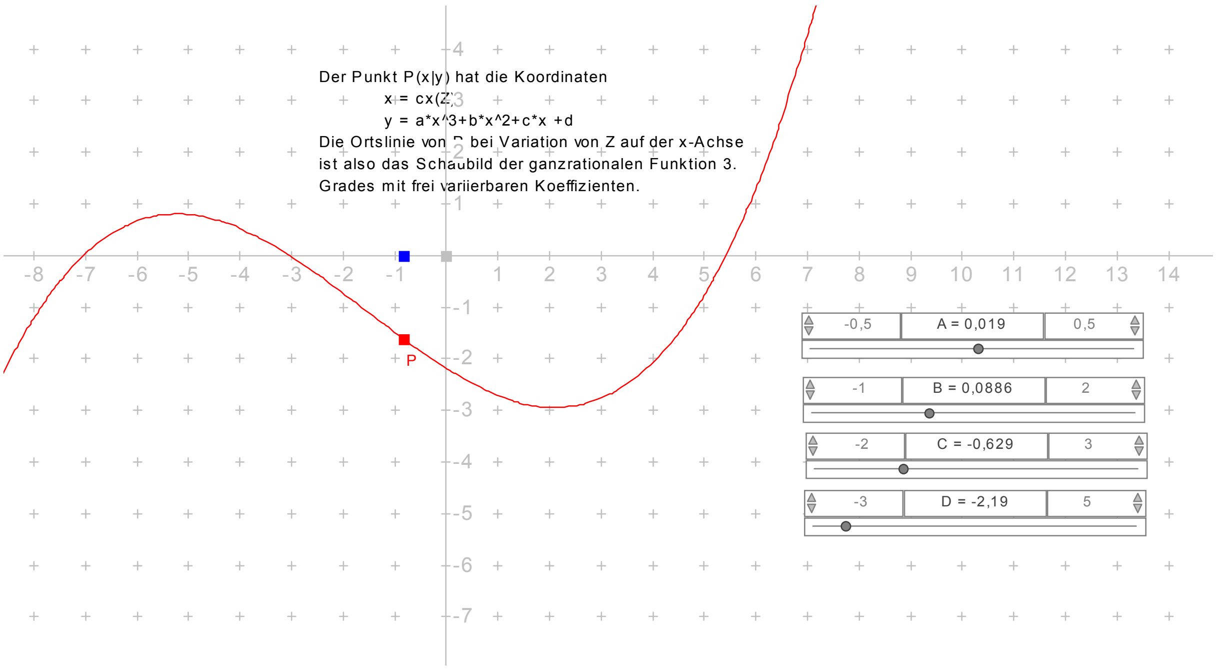
Wenn wir vom Einheitskreis ausgehen, so ist der sin(α) das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse. Da die Hypotenuse im Einheitskreis 1 ist, kann die Länge der Gegenkathete abgebildet werden. Man erzeuge also eine Parallele zur x Achse durch den Punkt Z und bestimme den Schnittpunkt dieser Parallele mit der vorher konstruierten Lotgerade. Dieser Schnittpunkt zeichnet die Ortslinie auf.

Beispiel 6:
Ein Funktionsplotter mit veränderlichen Variablen!

Die Konstruktion ist denkbar einfach. Man mache das Koordinatenkreuz sichtbar und binde einen Punkt auf die x Achse. Dieser Punkt wird benannt als Punkt A. Man kann also nun diesen Punkt auf der x Achse bewegen.

Nun wird ein zweiter Punkt erzeugt (Punkt mit den Koordinaten (x,y)). Wir geben als x und y Koordinate aber keinen festen Werte ein sondern beziehen uns auf die Koordinaten des Punktes A. Als x Koordinaten wird eingegeben: „cx(A)“ ! Das bedeutet cx → x Koordinate, cx(A) → x Koordinaten des Punktes A. Als y Koordinate geben wir zunächst ein 3*cx(A). Wenn wir jetzt den Punkt A bewegen, so verläuft der Punkt P auf einer Geraden durch den Ursprung. Die eingegebenen Koordinaten kann man wieder (den Punkt auswählen und rechte Maustaste betätigen) editieren und verändern.

Erzeugen Sie nun die Ortslinie dieses Punktes. Sie können mit Euklid sogenannte Zahlobjekte erstellen. Wenn Sie diese Zahlobjekte in den Term einbauen, der die x und y Koordinaten des Punktes P bestimmt, so können sie den Term und auch den Graph einer Funktion durch Variation der Parameter kontinuierlich verändern.



LERNWERKSTATT MATHEMATIK

Behandlung von Funktionenscharen am PC mit Anwendersoftware

Einleitung

Eigenschaften von Funktionsklassen lassen sich gut am PC über unterschiedliche Plotterprogramme durch die Bearbeitung von Funktionenscharen erfassen. Der Vorteil liegt darin, dass die Programme die Grafen schnell darstellen, die Schüler/innen die Eingaben jeder Zeit variieren und damit selbst experimentieren können. Durch die Visualisierung mehrerer Grafen gleichen Funktionstyps kann sich leichter eine Vorstellung vom typischen Verlauf der Grafen entwickeln.
Nahezu jedes Plotterprogramm bietet die Möglichkeit Kurvenscharen darzustellen. Die Vorgehensweisen sind grundsätzlich ähnlich mit der Eingabe des Funktionsterms, dem Anfangs- und Endwert sowie der Schrittweite für den Parameter. Von Programm zu Programm ergeben sich jedoch kleine Unterschiede. An drei Softwarebeispielen soll die Arbeitsweise verdeutlicht werden:

- **Derive**
- **MatheAss**
- **Funktionenplotter**

1. Derive

Derive ist ein sehr vielfältiges CAS – Programm für die Schule, bei dem aufgrund der unzähligen Anwendungsmöglichkeiten die Eingabe gesondert erklärt werden muss (s. Arbeitsblatt).

2. MatheAss

MatheAss ist ein verbreitetes Mathe Anwendungsprogramm für die Gebiete Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik. Zur Darstellung von Kurvenscharen muss im Menü <*ANALYSIS*> das Untermenü <*KURVENSCHAREN*> aufgerufen werden. In das sich öffnende Fenster wird oben der Term der Funktionenschar mit k als Parameter eingegeben (hier: **x^2 + k*x**), in der dritten Zeile können wieder Start- und Endwert sowie Schrittweite für den Parameter k eingegeben werden, z.B. für k von -2 bis 4 mit der Schrittweite 1. Mit <*RETURN*> oder durch Anklicken des GRAFIK-Fensters werden die Grafen dargestellt.

3. MathPlot

Im Funktionenplotter öffnet sich ein Fenster, das in Eingabe- und Zeichenbereich unterteilt ist. Die Eingabe der Funktionsgleichung erfolgt in der ersten Zeile z.B. in der Form: **fa(x) = x^2+a*x** .
Nachdem die Eingabe mit <*RETURN*> beendet wurde, erscheint der Ausdruck im zweiten Teilfenster *FUNKTIONEN*. Durch Doppelklicken des Ausdrucks in diesem Fenster erscheint das Menü <*EIGENSCHAFTEN*> mit dem Untermenü <*PARAMETERSCHAREN*>. Dort muss <*GRAPHENSCHAR ZEICHNEN*> durch ein Klick aktiviert werden und anschließend der Parameter samt Start-, Endwert und Schrittweite eingegeben werden. Nach Abschließen der Eingabe mit <*OK*> erscheinen im Grafikfenster die gewünschten Kurven.

Alles Parabeln (Funktionsgrafen am PC)

==

<u>**Aufgaben:**</u> Starte das Programm **MatheAss**, rufe <*Kurvenscharen*> im Menü <*Analysis*> auf.

a) Gib den Funktionsterm f(x,k) = **k*x^2** ein und für k in der 3. Zeile von **1** bis **5** mit der Schrittweite **1**.

b) Experimentiere mit den Eingaben für k. Verändere die Schrittweite auf 0,5 oder den Anfangswert auf 0,1. Probiere weitere Anfangs- und Endwerte.

c) Notiere, welche Gemeinsamkeiten alle Grafen haben. Was verändert sich, wenn der Faktor k größer bzw. kleiner wird ? Beziehe dich dabei auf die Normalparabel.

d) Experimentiere genauso mit negativen Werten für k. Notiere, welche Veränderungen sich im Vergleich zu den positiven Faktoren k ergeben. Gib es auch Gemeinsamkeiten ?

e) Zeichne in das Koordinatensystem mit der Normalparabel je einen Vertreter der möglichen Grafen zur Funktion mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = k \cdot x^2}$. Wie viele Fälle würdest du unterscheiden?